浅谈 *S* 参数

（2015 年 9 月 8 日草稿发布）

作者：TBsoft

1 将电压波以及功率波仅看作数学工具

一般教材在介绍 *S* 参数背景知识之前，通常使用传输线来引入电压波以及功率波的概念，使用传输线引入电压波概念具有直观的优点，但容易让读者认为只有使用了传输线才可以有电压波和功率波的概念。实际上，如果将电压波和功率波仅看作一种数学工具，那么在没有传输线的情况下，仍然可以使用这一工具，下面通过实例来说明这个问题。

例 1-1 设信号源电压（用有效值相量表示）为 $\dot{V}_{\mathrm{S}}$（以下为了方便，将相量符号上的圆点省略），内阻为 Z_0（纯阻），负载阻抗为 Z_{L}，求负载上的<u>**有功**</u>功率。

解：如果 Z_0 为纯阻（无电抗成分），众所周知，当 $Z_{\mathrm{L}}=Z_0$ 时，也就是阻抗匹配时负载上功率最大，此时负载功率也就是有功功率，负载有功功率 $P_{\mathrm{L}}=\dfrac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}$，换而言之，当 $Z_{\mathrm{L}}=Z_0$ 时，信号源送出最大有功功率到负载，此时负载上的电压 $V_{\mathrm{L}}=\dfrac{V_{\mathrm{S}}}{2}$，这是信号源能送出的最大有功功率对应的负载电压。当 $Z_{\mathrm{L}}\neq Z_0$ 时，信号源不能送出最大有功功率到负载，将这种情况看作<u>**信号源送到负载的有功功率被负载反射回来了一部分**</u>，并将信号源能送出的最大有功功率（可简称为入射功率）对应的负载电压称为入射电压 V^+，负载反射回来的有功功率（可简称为反射功率）对应的负载电压称为反射电压 V^-，并认为实际负载电压 $V_{\mathrm{L}}=V^+ + V^-$，显然 $V^+=\dfrac{V_{\mathrm{S}}}{2}$，此时 $V_{\mathrm{L}}=V_{\mathrm{S}}\dfrac{Z_{\mathrm{L}}}{Z_0+Z_{\mathrm{L}}}$，那么可得：

$$V^- = V_{\mathrm{L}} - V^+ = V_{\mathrm{S}}\left(\frac{Z_{\mathrm{L}}}{Z_0+Z_{\mathrm{L}}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{V_{\mathrm{S}}}{2}\cdot\frac{Z_{\mathrm{L}}-Z_0}{Z_{\mathrm{L}}+Z_0}=V^+\frac{Z_{\mathrm{L}}-Z_0}{Z_{\mathrm{L}}+Z_0}$$

定义负载电压反射系数 $\mathit{\Gamma}_{\mathrm{L}}=\dfrac{Z_{\mathrm{L}}-Z_0}{Z_{\mathrm{L}}+Z_0}$，那么有 $V^+=\dfrac{V_{\mathrm{S}}}{2}$，$V^-=\mathit{\Gamma}_{\mathrm{L}}V^+$，

$V_{\mathrm{L}}=(1+\Gamma_{\mathrm{L}})\dfrac{V_{\mathrm{S}}}{2}$，同时可得 $Z_{\mathrm{L}}=Z_0\dfrac{1+\Gamma_{\mathrm{L}}}{1-\Gamma_{\mathrm{L}}}$，计算负载上的有功功率：

$$P_{\mathrm{L}}=\mathrm{Re}\left(\frac{|V_{\mathrm{L}}|^2}{Z_{\mathrm{L}}}\right)=\mathrm{Re}\left[\frac{\left|(1+\Gamma_{\mathrm{L}})\dfrac{V_{\mathrm{S}}}{2}\right|^2}{Z_0\dfrac{1+\Gamma_{\mathrm{L}}}{1-\Gamma_{\mathrm{L}}}}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}\cdot\frac{|1+\Gamma_{\mathrm{L}}|^2(1-\Gamma_{\mathrm{L}})}{1+\Gamma_{\mathrm{L}}}\right]$$

设 $\Gamma_{\mathrm{L}}=x+\mathrm{j}y$，可得：

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{L}}&=\mathrm{Re}\left[\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}\cdot\frac{|1+x+\mathrm{j}y|^2(1-x-\mathrm{j}y)}{1+x+\mathrm{j}y}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}\cdot\frac{|1+x+\mathrm{j}y|^2(1-x-\mathrm{j}y)(1+x-\mathrm{j}y)}{(1+x+\mathrm{j}y)(1+x-\mathrm{j}y)}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left\{\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}\cdot\frac{[(1+x)^2+y^2](1-x-\mathrm{j}y)(1+x-\mathrm{j}y)}{(1+x)^2+y^2}\right\}\\
&=\mathrm{Re}\left[\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}(1-x-\mathrm{j}y)(1+x-\mathrm{j}y)\right]\\
&=\mathrm{Re}\left\{\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}[(1-x)(1+x)-\mathrm{j}(1-x)y-\mathrm{j}(1+x)y-y^2]\right\}\\
&=\mathrm{Re}\left\{\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}[1-(x^2+y^2)-2\mathrm{j}y]\right\}\\
&=\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}[1-(x^2+y^2)]=\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}(1-|\Gamma_{\mathrm{L}}|^2)
\end{aligned}$$

最终可得负载上的有功功率 $P_{\mathrm{L}}=\dfrac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}(1-|\Gamma_{\mathrm{L}}|^2)$。

从例 1-1 的结果可以得到以下结论：

当信号源电压为 V_{S}，内阻为 Z_0（纯阻），负载阻抗为 Z_{L} 时，如果定义负载电压反射系数 $\Gamma_{\mathrm{L}}=\dfrac{Z_{\mathrm{L}}-Z_0}{Z_{\mathrm{L}}+Z_0}$，那么负载上的有功功率 $P_{\mathrm{L}}=\dfrac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}(1-|\Gamma_{\mathrm{L}}|^2)$。前面提到，

入射功率就是信号源能送出的最大有功功率 $\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}$，现在负载有功功率 $P_{\mathrm{L}} = \frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}(1-|\Gamma_{\mathrm{L}}|^2)$，如果将负载有功功率看作入射功率与反射功率之差，可得反射功率为 $\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}|\Gamma_{\mathrm{L}}|^2$。

定义入射到负载的入射功率波，以及从负载反射回来的反射功率波：

入射功率波 $a = \frac{V^+}{\sqrt{Z_0}}$

反射功率波 $b = \frac{V^-}{\sqrt{Z_0}}$

那么可得：

$a = \frac{V_{\mathrm{S}}}{2\sqrt{Z_0}}$，$|a|^2 = \frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}$ 即为入射功率；

$b = \frac{\Gamma_{\mathrm{L}} V_{\mathrm{S}}}{2\sqrt{Z_0}}$，$|b|^2 = \frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}|\Gamma_{\mathrm{L}}|^2$ 即为反射功率。

于是负载上的有功功率可表示为 $P_{\mathrm{L}} = |a|^2 - |b|^2$，可见负载有功功率可以很容易地用入射功率波和反射功率波表示。

可见通过引入入射电压、反射电压以及电压反射系数概念，进而引入入射功率波和反射功率波概念，表示负载上的有功功率变得十分容易，因此可以将电压波和功率波仅看作一种数学工具，不一定需要从传输线角度考虑。

2 功率波的应用

实际射频系统中，Z_0 即为射频系统的特征阻抗，一般为 50 Ω 纯阻，射频系统传输线（通常看作无损耗传输线），例如射频同轴电缆的特征阻抗也等于 Z_0。对于射频系统中一个实际的阻抗 Z，例如信号源阻抗或者负载阻抗，同样可定义电压反射系数 $\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$，或者也可以写成 $Z = Z_0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$，注意使用电压反射系数时，

均应从阻抗为特征阻抗 Z_0 的一方，向阻抗为 Z 的一方看去，也就是说电压反射系数对应阻抗为 Z 的一方。例如在例 1-1 中，信号源内阻为 Z_0，负载阻抗为 Z_L，则电压反射系数应该从信号源一方向负载一方看去，电压反射系数为负载（或者负载端口）电压反射系数 $\Gamma_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$。

下面通过实例来看功率波的进一步应用。

例 2-1 设信号源电压为 V_S，内阻为 Z_S，负载阻抗为 Z_0，求负载上的有功功率。

解：由于负载阻抗为特征阻抗 Z_0，因此可从负载一方向信号源一方看去，定义信号源电压反射系数 $\Gamma_S = \dfrac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0}$，计算负载电压：

$$V_L = V_S \frac{Z_0}{Z_S + Z_0} = \frac{V_S}{2}\left(1 - \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0}\right) = (1 - \Gamma_S)\frac{V_S}{2}$$

计算负载上的有功功率：

$$P_L = \mathrm{Re}\left[\frac{\left|(1-\Gamma_S)\dfrac{V_S}{2}\right|^2}{Z_0}\right] = \frac{|V_S|^2}{4Z_0}|1 - \Gamma_S|^2$$

下面从功率波角度分析例 2-1 的结果，由于负载阻抗等于特征阻抗 Z_0，因此相对特征阻抗 Z_0 可以认为负载无反射。可以想象在信号源和负载之间插入一段特征阻抗为 Z_0 的无损耗传输线，则反射仅发生在信号源连接传输线处，即信号源端口处，而传输线连接负载处，即负载端口处无反射，因此入射电压就等于负载电压，即 $V^+ = V_L$，反射电压值为零，即 $V^- = 0$。由此可得入射到负载的入射功率波，以及从负载反射回来的反射功率波：

$$a = \frac{V^+}{\sqrt{Z_0}} = \frac{(1-\Gamma_S)V_S}{2\sqrt{Z_0}}$$

$$b = \frac{V^-}{\sqrt{Z_0}} = 0$$

***a* 和 *b* 也可看作想象中插入传输线上的入射功率波和反射功率波**，根据功率波可

计算负载上的有功功率：

$$P_{\mathrm{L}}=|a|^2-|b|^2=\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}|1-\varGamma_{\mathrm{S}}|^2$$

可见根据功率波的计算结果，与例 2-1 的结果一致。

例 2-2 设信号源电压为 V_{S}，内阻为 Z_{S}，负载阻抗为 Z_{L}，求负载上的有功功率。

解：由于信号源内阻和负载阻抗均不一定等于特征阻抗 Z_0，下面使用功率波作为数学工具计算负载上的有功功率。

定义负载电压反射系数 $\varGamma_{\mathrm{L}}=\dfrac{Z_{\mathrm{L}}-Z_0}{Z_{\mathrm{L}}+Z_0}$，信号源电压反射系数 $\varGamma_{\mathrm{S}}=\dfrac{Z_{\mathrm{S}}-Z_0}{Z_{\mathrm{S}}+Z_0}$。

设入射到负载端口的功率波为 a，从负载端口反射回来的功率波为 b，那么有：

$$\frac{b}{a}=\varGamma_{\mathrm{L}}$$

入射到负载端口的功率波也就是从信号源端口出射的功率波，从负载端口反射回来的功率波也就是入射到信号源端口的功率波，但要注意，信号源自身也从信号源端口输出功率波，从例 2-1 可知其值为 $\dfrac{(1-\varGamma_{\mathrm{S}})V_{\mathrm{S}}}{2\sqrt{Z_0}}$，因此，信号源端口出射的功率波，需要减去信号源自身输出功率波，才能得到入射到信号源端口功率波对应的反射功率波，因此可得：

$$\frac{a-\dfrac{(1-\varGamma_{\mathrm{S}})V_{\mathrm{S}}}{2\sqrt{Z_0}}}{b}=\varGamma_{\mathrm{S}}$$

联立以上两式，并稍作整理可得线性方程组：

$$\begin{cases}a\varGamma_{\mathrm{L}}-b=0\\ a-b\varGamma_{\mathrm{S}}=\dfrac{(1-\varGamma_{\mathrm{S}})V_{\mathrm{S}}}{2\sqrt{Z_0}}\end{cases}$$

解方程组可得：

$$a=\frac{V_{\mathrm{S}}}{2\sqrt{Z_0}}\cdot\frac{1-\Gamma_{\mathrm{S}}}{1-\Gamma_{\mathrm{S}}\Gamma_{\mathrm{L}}}$$

$$b=\frac{V_{\mathrm{S}}}{2\sqrt{Z_0}}\cdot\frac{(1-\Gamma_{\mathrm{S}})\Gamma_{\mathrm{L}}}{1-\Gamma_{\mathrm{S}}\Gamma_{\mathrm{L}}}$$

因此可得负载上的有功功率：

$$P_{\mathrm{L}}=|a|^2-|b|^2=\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}\cdot\frac{|1-\Gamma_{\mathrm{S}}|^2(1-|\Gamma_{\mathrm{L}}|^2)}{|1-\Gamma_{\mathrm{S}}\Gamma_{\mathrm{L}}|^2}$$

例 2-1 的结果表明：当信号源接一阻抗正好为 Z_0 的负载时，负载上的有功功率即等于例 2-1 中计算得到的 P_{L}，对于射频信号源直接连接射频功率计测量功率时，由于射频功率计的输入阻抗通常正好为 Z_0，即相当于在射频信号源上接阻抗为 Z_0 的负载，此时射频功率计测出的信号源有功功率也正好等于例 2-1 中计算得到的 P_{L}，因此这一 P_{L} 称为信号源的额定功率。

从例 2-2 的结果可以证明（具体证明从略）：当 $Z_{\mathrm{L}}=Z_{\mathrm{S}}^*$，即负载阻抗与信号源内阻互为共轭复数，或者说信号源与负载达到共轭匹配时，P_{L} 最大，这一 P_{L} 称为信号源的资用功率，即“可资利用的最大功率”，可用 P_{A} 表示，计算可得（具体计算过程留给读者自行推导）：

$$P_{\mathrm{A}}=\frac{|V_{\mathrm{S}}|^2}{4Z_0}|1-\Gamma_{\mathrm{S}}|^2\frac{1}{1-|\Gamma_{\mathrm{S}}|^2}$$

当射频信号源内阻正好等于 Z_0 时，则该射频信号源的资用功率也正好等于额定功率，因此设计和生产射频信号源时，通常使其内阻尽量接近 Z_0。

3 *S* 参数

二端口网络的 S 参数是通过端口入射功率波和反射功率波定义的，设入射到二端口网络端口 1 的功率波为 a_1，从端口 1 反射回来的功率波为 b_1（实际上 b_1 理解为从端口 1 出射的功率波更为准确，下面的 b_2 也类似，具体原因另行分析）；入射到端口 2 的功率波为 a_2，从端口 2 反射回来的功率波为 b_2，那么二端口网络的 S 参数有如下定义：

$$b_1=S_{11}a_1+S_{12}a_2$$
$$b_2=S_{21}a_1+S_{22}a_2$$

如果用V_1^+和V_1^-（某些参考文献写作 V_{1i}和 V_{1r}）分别表示端口 1 的入射电压和反射电压，V_2^+和V_2^-（又可写作 V_{2i}和 V_{2r}）分别表示端口 2 的入射电压和反射电压，由于存在下列关系：

$$a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_0}}$$

$$b_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_0}}$$

$$a_2 = \frac{V_2^+}{\sqrt{Z_0}}$$

$$b_2 = \frac{V_2^-}{\sqrt{Z_0}}$$

那么 S 参数也可以用端口入射电压和反射电压定义：

$$V_1^- = S_{11}V_1^+ + S_{12}V_2^+$$
$$V_2^- = S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+$$

根据通过功率波定义的 S 参数，可得每一个 S 参数的定义：

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0}$$

$$S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a_1=0}$$

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0}$$

$$S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0}$$

可见，测量二端口网络 S 参数时，要求二端口网络某一个端口的入射功率波（或者入射电压）值为零，而这在射频频段是容易实现的，下面通过实例来说明二端口网络 S 参数的测量。

例 3-1 在射频频段测量某二端口网络的 S_{11} 和 S_{21}。

解：将二端口网络的端口 1 通过一条特征阻抗为 Z_0 的无损耗传输线连接到一个内阻为 Z_0 的射频信号源上，将二端口网络的端口 2 通过另一条特征阻抗为 Z_0 的无损耗传输线连接到一个阻抗为 Z_0 的负载上，由于射频信号源内阻和负载阻抗都为 Z_0，因此在射频信号源端口和负载端口处均无反射，反射一定发生在二端口网络的端口 1 和端口 2 上，参见例 2-1 的分析可知负载无反射，相应可得端口 2 的入射功率波值为零，即 $a_2 = 0$ 。

在两条传输线上安装定向耦合器（关于定向耦合器的资料，读者可参阅射频或者微波方面的专门文献）和相应测量仪表，测出传输线上两个方向的电压波，也就是入射电压（波）和反射电压（波），即可计算出传输线上的入射功率波和反射功率波，参见例 2-1 的分析可知，传输线上的功率波对应端口的功率波，因此 a_1、b_1 和 b_2 均可测得，又已知 $a_2 = 0$ ，因此可计算出 S_{11} 和 S_{21}：

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0}$$

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0}$$

基于这种通过定向耦合器测量入射电压和反射电压，进而计算功率波和 S 参数的测量方法设计的仪器，称为**网络分析仪**。

从例 3-1 的结果可以得出：如果某二端口网络是一个以端口 1 为输入，端口 2 为输出的射频放大器，则当这个二端口网络端口 1 接上内阻为 Z_0 的射频信号源，端口 2 接上阻抗为 Z_0 的负载时，S_{21} 表示从端口 2 反射回来（更准确地说是出射）的功率波与入射到端口 1 的功率波之比，也就是端口 2 反射（出射）电压与端口 1 入射电压之比，由于负载无反射，负载电压就等于端口 2 反射（出射）电压，因此 S_{21} 的模 $|S_{21}|$ 即为射频放大器的电压增益，准确地说是射频放大器输入输出均接 Z_0（$50\,\Omega$）信号源和负载时的电压增益，S_{21} 模的二次方 $|S_{21}|^2$ 即为相应功率增益，但如果将电压增益和功率增益均用 dB 表示，则二者的值相同，因为有：

$$20\lg|S_{21}| = 10\lg|S_{21}|^2$$

目前在某些射频晶体管和射频放大器 IC 的手册中，常用以下术语表示以 dB 为单位的 S 参数模：

$\left|S_{11}\right|$（dB）称为输入回波损耗 RL_{in}（Input Return Loss）；

$\left|S_{22}\right|$（dB）称为输出回波损耗 RL_{out}（Output Return Loss）；

$\left|S_{21}\right|$（dB）称为功率增益 G_{P} 或者 g（Power Gain 或者 Gain）；

$\left|S_{12}\right|$（dB）称为（反向）隔离度 ISL 或者 I_{rev}（Isolation）。

由于$\left|S_{11}\right|$、$\left|S_{22}\right|$和$\left|S_{12}\right|$通常都小于 1，也就是说 RL_{in}、RL_{out}和 ISL 通常都为负值，因此某些手册上给出的 RL_{in}、RL_{out}和 ISL 实际是它们的绝对值，使用时需要加以注意。