



空气动力学 II

第四章 低速翼型及机翼的基本理论

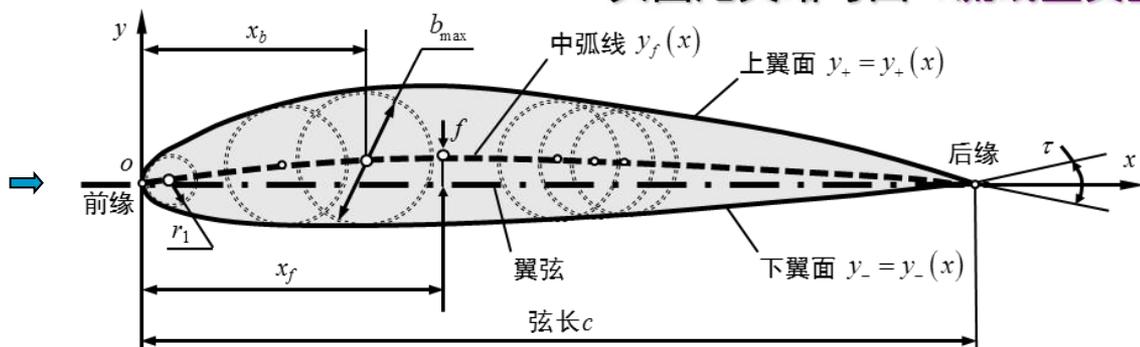
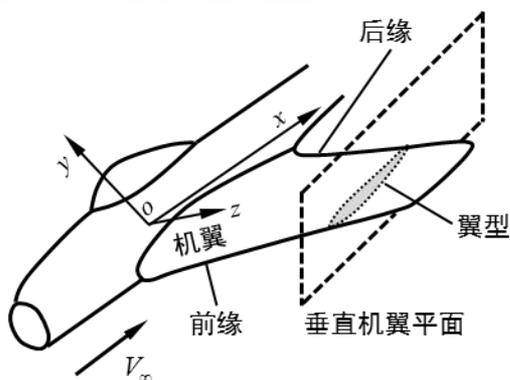
内容

- 翼型的几何/气动参数定义及其气动特性
- 薄翼理论
- 任意形状翼型绕流的面涡法
- 低速机翼的气动特性

翼型几何/气动参数及气动特性

头圆尾尖略弯曲 \Rightarrow 流线型翼型

翼型几何参数



x轴: 飞行器轴线/来流方向

y轴: 指向飞行器上方

z轴: 指向右侧机翼/展向

翼型厚度
分布函数

$$y_b(x) = \frac{1}{2} [y_+(x) - y_-(x)]$$

前缘/尾缘: 翼型的最前点/最后点

弦长c: 连接前/尾缘的直线段长度

中弧线: 内切圆圆心连线

弯度f: 垂直弦线方向上中弧线与弦线间的最大距离 $\bar{f} = \frac{f}{c}$

最大弯度位置: $\bar{x}_f = x_f/c$

厚度b: 内切圆直径

薄翼型 $\bar{b} = \frac{b_{\max}}{c} \leq 0.12$

相对最大厚度位置: $\bar{x}_b = x_b/c$

NACA四位数字翼型 \rightarrow **NACA2412** $f/c = 2\%$, $x_f/c = 40\%$, $b/c = 12\%$, $x_b/c = 30\%$

NACA五位数字翼型 \rightarrow **NACA23012** $2 \times 1.5 = 10C_{l_{\text{设}}}$, $30/2 = x_f/c\%$, $b/c = 12\%$

$C_{l_{\text{设}}}$: 翼型中弧线在前缘的切线与来流平行时的翼型理论升力系数

NACA六位数字翼型 \rightarrow **NACA65₃-218**

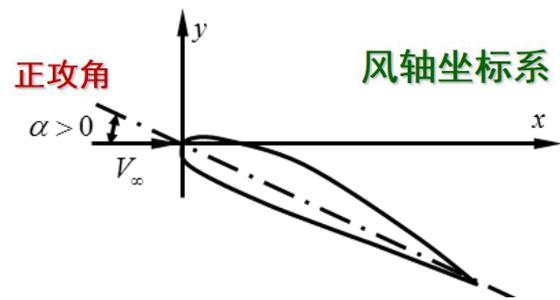
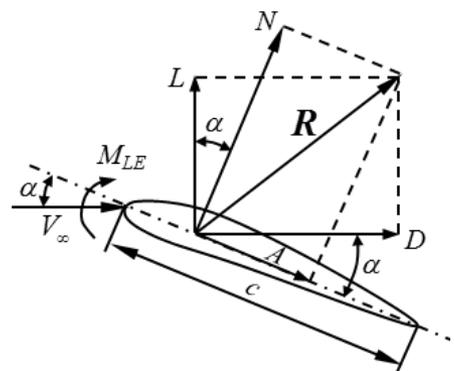
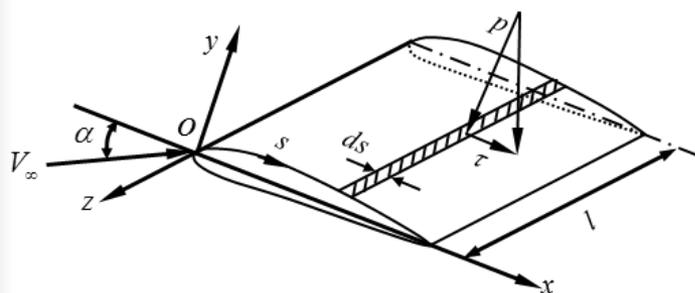
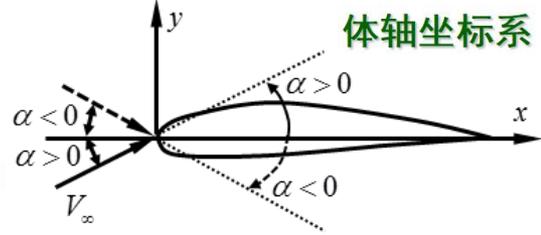
6 - 翼型族号, $5/10 = x_{\text{cpmin}}/c\%$, $\pm 3/10 = \Delta C_{l_{\text{设}}}$,
 $2/10 = C_{l_{\text{设}}}$, $b/c = 18\%$

翼型气动参数

攻角：来流 V_∞ 和翼型弦线间的夹角

绕翼型的无黏流动

小攻角 升力√力矩√阻力×
大攻角 升力×力矩×阻力×



气动力：空气施加在物面上作用力 { 垂直指向物面→表面压力p
切于物面且与气流方向相同→切应力/摩擦力 τ_w → 合力 \vec{R}

\vec{R} { 垂直来流→升力L 平行来流→阻力D
垂直弦线→法向力N 平行弦线→轴向力A → $L = N \cos \alpha - A \sin \alpha$
 $D = N \sin \alpha + A \cos \alpha$ 升阻比 $\frac{L}{D}$

力矩：气动力对前缘取力矩 M_{LE} { 顺时针力矩为正→使翼型抬头
逆时针力矩为负→使翼型低头向下 → 绕z轴的俯仰力矩

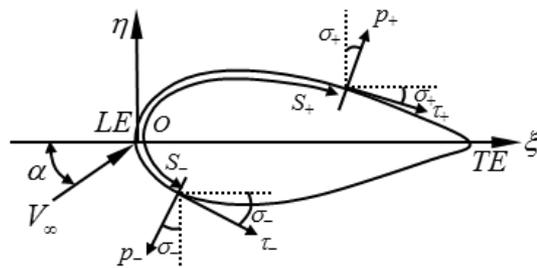
二维 升力系数 阻力系数 力矩系数 压强系数 摩擦系数 自由来流动压

$$c_l = \frac{L}{q_\infty c} \quad c_d = \frac{D}{q_\infty c} \quad c_{mLE} = \frac{M_{LE}}{q_\infty c^2} \quad C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \quad C_f = \frac{\tau_w}{q_\infty}$$

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$$

气动力和力矩计算---压强和剪切力沿翼型表面的积分

攻角 α 较小，翼型平、薄，忽略摩擦力，在风轴系中



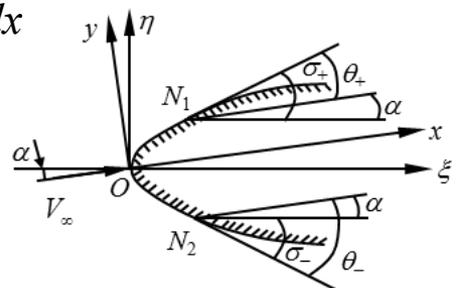
$$N = \int_0^c (p_- - p_+) dx$$

$$A = \int_0^c \left[p_+ \left(\frac{dy_+}{dx} + \alpha \right) - p_- \left(\frac{dy_-}{dx} + \alpha \right) \right] dx = \int_0^c [p_+ (\theta_+ + \alpha) - p_- (\theta_- + \alpha)] dx$$

$$M_{LE} = \int_0^c (p_+ - p_-) x dx$$

$$L = \int_0^c (p_- - p_+) dx \quad \text{升力由翼型法向压强合成}$$

$$D = \int_0^c \left(p_+ \frac{dy_+}{dx} - p_- \frac{dy_-}{dx} \right) dx = \int_0^c (p_+ \theta_+ - p_- \theta_-) dx \quad \text{无黏流体，存在指向来流方向的阻力}$$

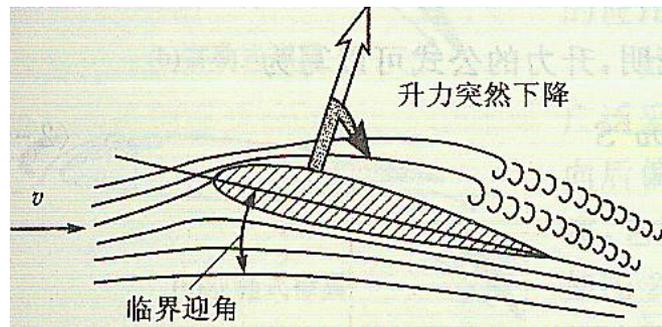


翼型前缘的绕流效应 → 速度极其大、压强为负极大值局部区域 →

前缘吸力平衡阻力
达朗贝尔佯谬成立

考虑黏性，低速下
翼型阻力 { 翼型表面黏性剪切应力 → 摩擦力
翼型表面附面层分离 → 压差阻力

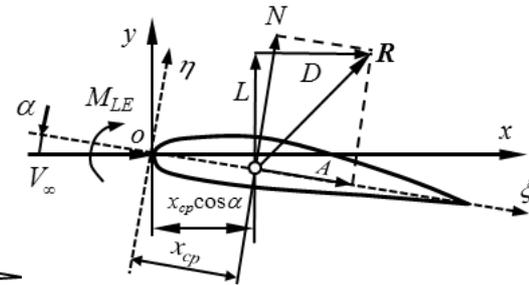
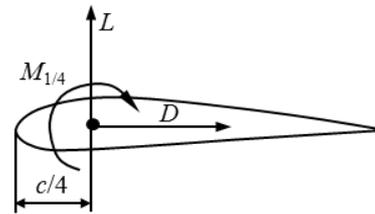
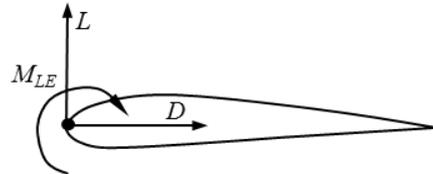
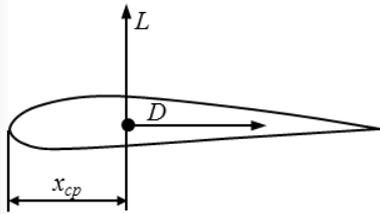
附面层分离 { 分离起始位置后出现很大的低压区 → 阻力
升力突降 → 失速



压力中心：翼型上气动合力作用点的位置/
使分布的气动载荷的总力矩为零的点

$$M_{LE} = -x_{cp} N \Rightarrow x_{cp} = -\frac{M_{LE}}{N}$$

升力引起力矩 $x_{cp} = -\frac{M_{LE}}{L \cos \alpha} \approx -\frac{M_{LE}}{L}$ 攻角较小

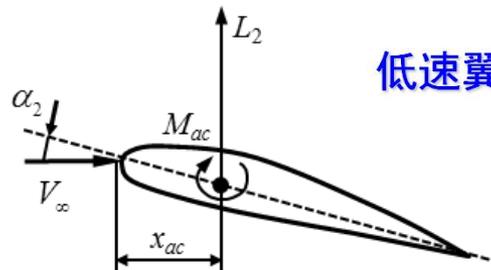
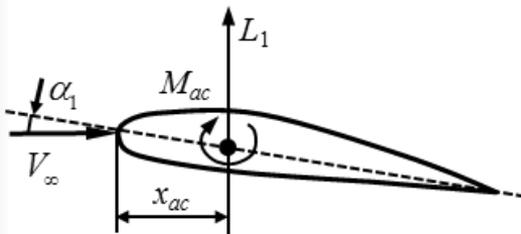


三种等效力-力矩系统 $M_{LE} = -\frac{c}{4}L + M_{1/4} = -x_{cp}L$ $M_{1/4} = M_{LE} + \frac{c}{4}L = \left(-x_{cp} + \frac{c}{4}\right)L$

沿弦向距前缘 x 点 $M_x = M_{LE} + xL = (-x_{cp} + x)L \Rightarrow c_{mx} = c_{mLE} + \frac{x}{c}c_l$

焦点/气动中心：在较大攻角范围内，气动力绕该点的力矩保持不变

焦点沿弦向距前缘距离 x_{ac} $M_{ac} = M_{LE} + x_{ac}L = (-x_{cp} + x_{ac})L \Rightarrow c_{mac} = c_{mLE} + \frac{x_{ac}}{c}c_l$



低速翼型/薄翼型 $\frac{dM_{ac}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow x_{ac} \approx \frac{c}{4}$

考虑黏性 $x_{ac} = (0.23 \sim 0.24)c$

低速翼型绕流图谱及其气动特性

压力_{下翼面} > 压力_{上翼面} → 升力

驻点 $C_p = +1.0$

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}$$

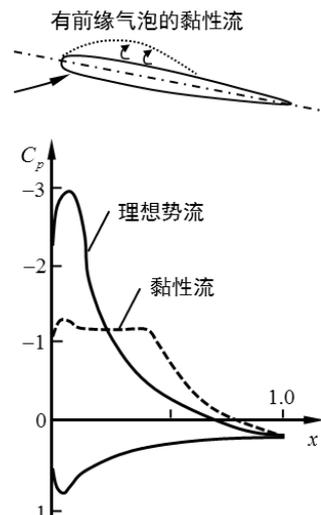
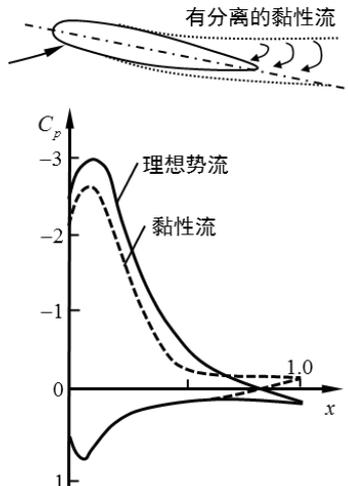
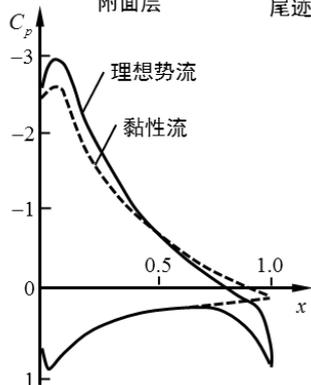
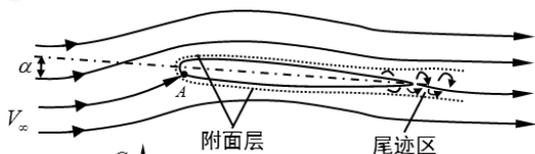
升力主要产生于前 $\frac{C}{3}$ 部分

$$c_l = \int_0^1 [(C_p)_- - (C_p)_+] \cos \alpha dx$$

$$\approx \int_0^1 [(C_p)_- - (C_p)_+] dx$$



翼型升力系数 = 上、下翼面
压强系数曲线之间面积



- 攻角小、无分离：应用无黏势流理论讨论翼型绕流合理
- 出现分离后，基于无黏势流理论得到的压强系数与实际结果有本质差别

升力系数 c_l 随 α 线性变化

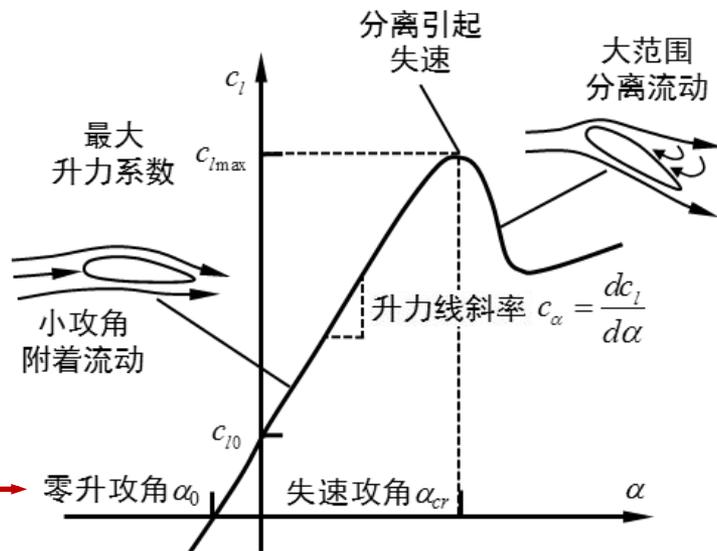
攻角 α 较小 → $c_\alpha = dc_l/d\alpha$ 升力线斜率

气流光滑流过翼型表面且为附着流动

攻角 α 较大 → 分离/回流 ← 黏性
 $c_{lmax} \rightarrow c_l$ 下降 → 失速/失速攻角 α_{cr}

绝对攻角 $\alpha_\alpha = \alpha - \alpha_0$

小负攻角 → $c_l = 0$ → 零升攻角 α_0

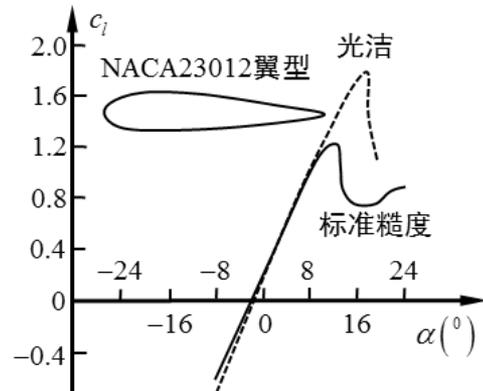
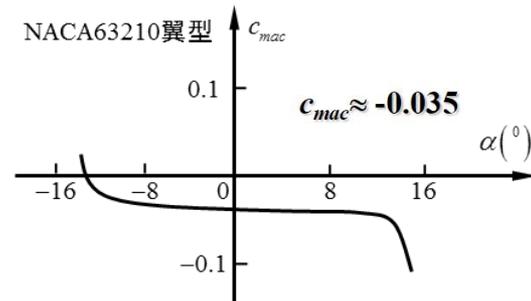
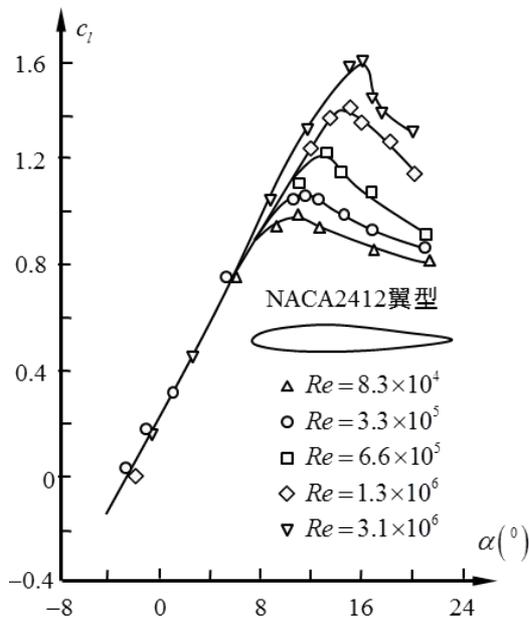


• c_α 与 Re 数无关

• c_{lmax} 随 Re 数增加而增加
/ 惯性力占优、扰动变强、延缓分离

• c_{mac} / 零升力矩随攻角变化小

• 翼型表面粗糙度对 c_{lmax} 有影响

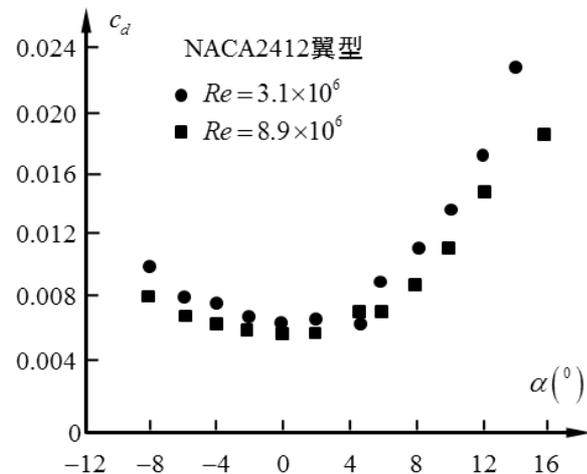


▲ 攻角较小，薄翼型阻力主要是摩擦阻力，压差阻力很小

▲ $\alpha = \alpha_{cr}$ 时，翼型后部附面层严重分离，压强降低，造成很大压差阻力

▲ Re 大 $\rightarrow c_d$ 小，黏性的相对作用减弱

▲ 减少翼型表面粗糙度会减小摩擦阻力；为减少摩擦阻力，应尽可能使翼型表面附面层保持为层流流态



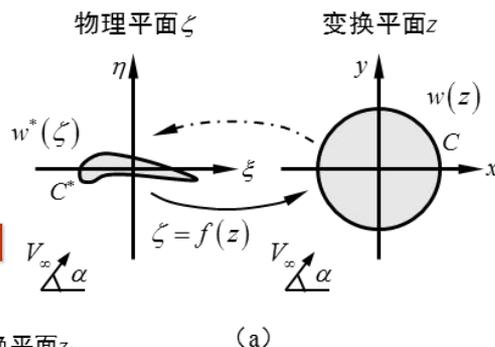
库塔条件及翼型绕流环量的产生

复变函数 $z = x + iy$ 任意解析函数 $w(z)$ 实部、虚部为调和函数

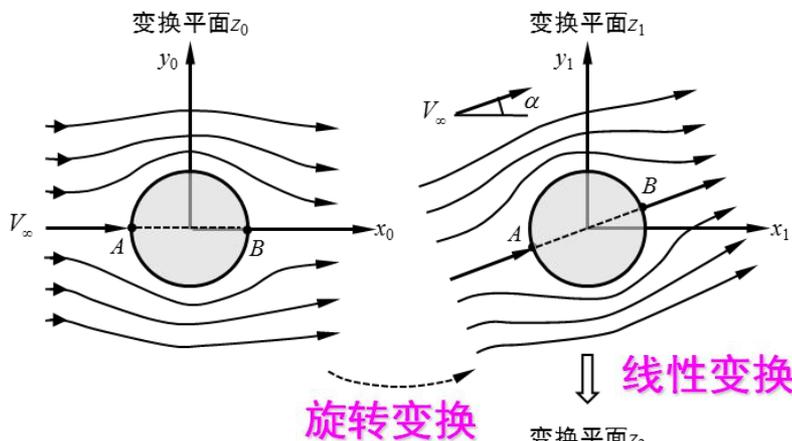
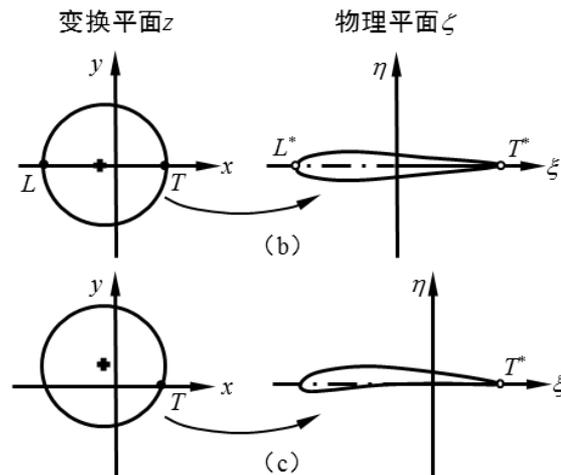
复势/复位函数 $w(z) = \phi + i\psi$

平面不可压
无旋流动 \iff 确定的
复势函数

保角变换 任意封闭的二维物体 \rightarrow 圆



儒可夫斯基变换 $r_2 = 0$



速度为 V_∞ 直匀流绕圆柱流动

带攻角 α 的绕圆柱流动

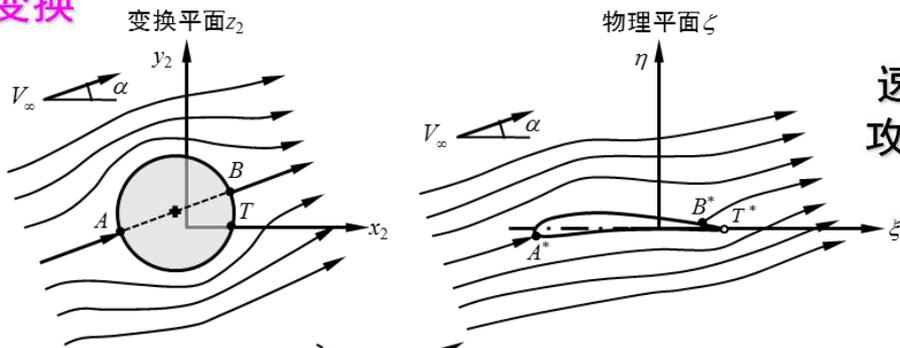
带攻角的绕偏心圆柱流动

速度为 V_∞ 均匀流以
攻角 α 绕儒可夫斯基
翼型流动

驻点位于 III、I 象限

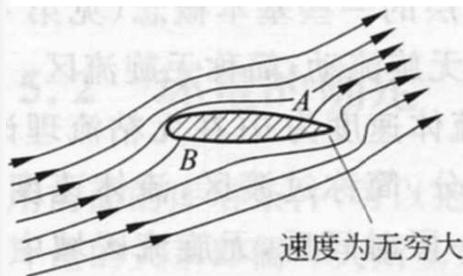
下翼面流体绕过 T^*
流至上翼面

T^* 处 $V \rightarrow \infty, p \rightarrow -\infty$

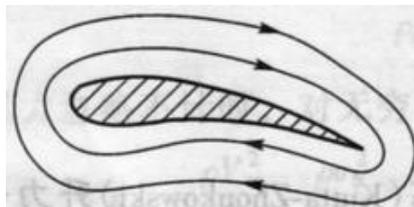


儒可夫斯基变换

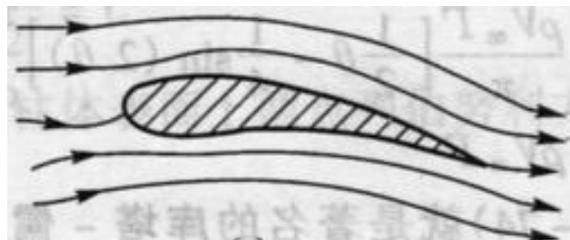
实验 → 黏性效应 → 物体上下表面气流在尾缘光滑处汇合 → 环量



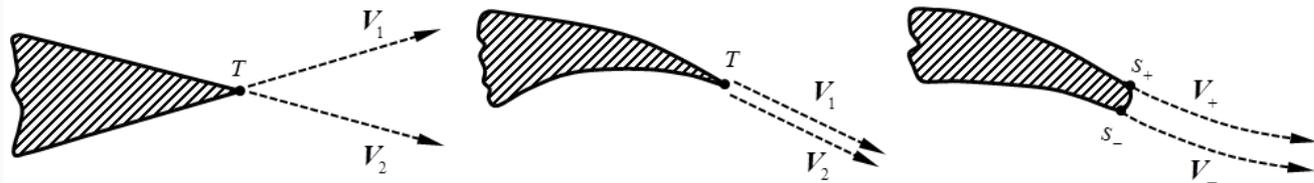
理想流体无环量绕翼型流动



绕翼型有环量流动



- 库塔条件**
- 处于任何攻角下的具有尖锐后缘的翼型，若流体附体则流线汇合点必在后缘；
 - 流体中运动的翼型，会产生适当强度的绕体 Γ 并使得物体的后缘点为驻点；
 - 后缘点处流体质点速度为有限值。



有限夹角后缘 → T点处不可能出现两个速度 → $V_1 = V_2 = 0$ → 驻点

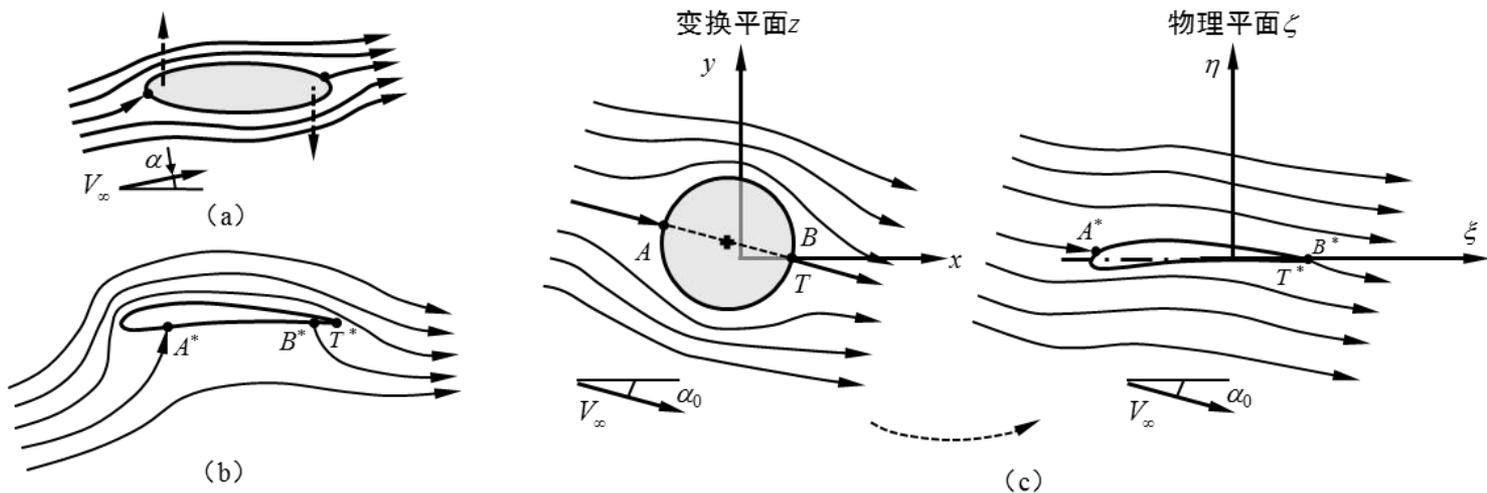
后缘夹角=0 → T点处压力唯一 $p_T + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_T + \frac{1}{2}\rho V_2^2$ → $V_1 = V_2$

圆弧后缘 → 存在 $p_{s_+} = p_{s_-} \Rightarrow V_+ = V_-$

不同 Γ
远场 ρ_∞ 及 V_∞ 、边界条件 α 及翼型 → 驻点位置不同的流动
满足翼型表面为流线条件 } 后缘点=驻点
库塔条件 → 唯一 Γ

升力产生的主要原因

- 翼型尖后缘的存在
- 翼型有向上的正弯度或抬头的正攻角



绕椭圆流动 → 下表面气流可绕过后缘流动至上表面后驻点 → 合力为零

绕翼型流动满足库塔条件 + 顺时针环量 → 驻点A*、B*位于III、IV象限

产生等强度逆时针环量满足库塔条件 ← 后缘处流体速度趋于无穷大 ← 上翼面理想流体绕过翼型后缘流动至下翼面的后驻点

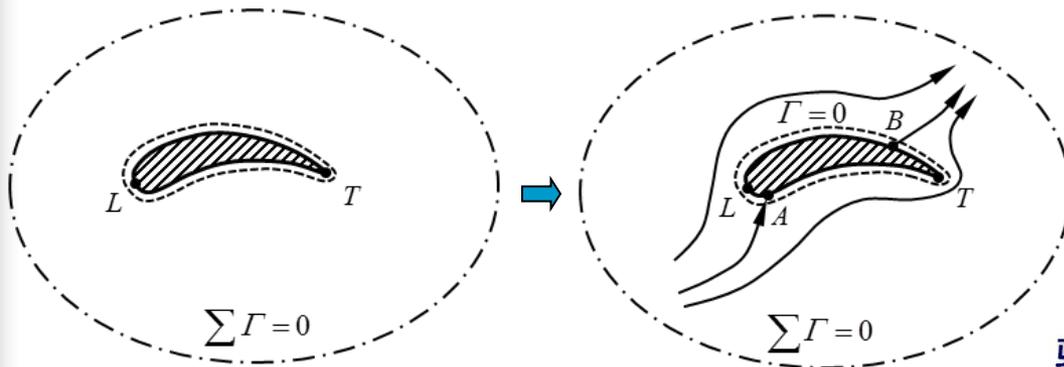
攻角 α 越大，后驻点与 x 轴夹角越大 → 下翼面气流经后缘至上翼面后驻点的流动的“驱动力”越强

$\alpha_0 < \alpha = 0$
 $L \neq 0$ → 翼型弯度是产生升力的原因之一 → 升力大 ← 满足库塔条件的环量强度增大

起动过程及起动涡

翼型在静止流场中加速至 V_∞
 足够大闭曲线且 $\Sigma\Gamma=0$
 绕翼型曲线L

短时起动考虑黏性
 其后用无黏理论分析

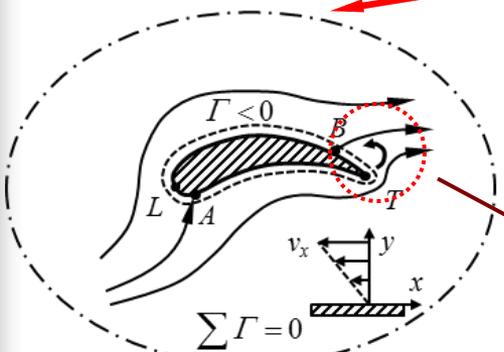


突然起动 \rightarrow 短时间内 $\Gamma=0$
 无环量绕翼型流动

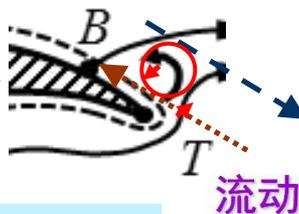
后驻点B位于上表面
 下表面流体绕后缘T点 \rightarrow B点汇合

驻点B 速度=0/压力最高 \rightarrow 尾缘点T 速度 $\rightarrow \infty$ /压力 $\rightarrow 0$

T \rightarrow B 流动遇到强逆流压力梯度

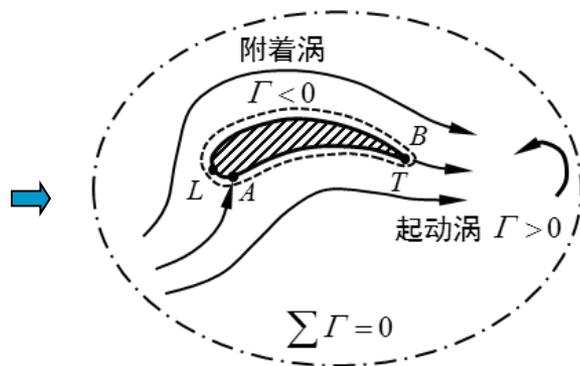


黏性流动 无黏流动 涡量守恒原理



压力梯度

流动



$$v_x = -cy \rightarrow \vec{\Omega} = -\partial v_x / \partial y \vec{k} = c\vec{k} > 0 \rightarrow \Gamma > 0$$

逆时针旋涡 \rightarrow 起动涡
 一段时间后 \rightarrow 顺时针物面旋涡 \rightarrow 附着涡
 后驻点B \rightarrow 顺流后移

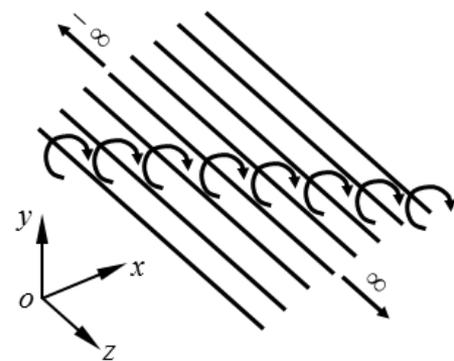
后驻点B \rightarrow 顺流后移至后缘点 \rightarrow 起动过程结束
 上下表面流动 \rightarrow 后缘点处平滑汇合流向下游
 起动涡 \rightarrow 随流体流向下游
 附着涡 \rightarrow 绕翼型存在

凯尔文定理 $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$ 起动涡 $\Gamma > 0$
 附着涡 $\Gamma < 0$ \rightarrow 闭曲线 $\Sigma\Gamma = 0$

★流体的黏性是绕流物体时
 环量形成和产生升力的源泉

薄翼理论

薄、平翼型 $\left\{ \begin{array}{l} \text{减少阻力} \\ \text{无黏流理论适用/无分离} \end{array} \right.$

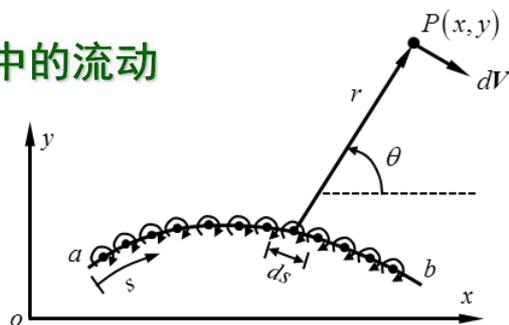


低速翼型绕流解的面涡理论

点涡 涡管半径 $r \rightarrow 0$ 时蜕化为涡丝
垂直于无限长直涡丝各平行平面中的流动

$$v_r = 0 \quad \phi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \Rightarrow \psi = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln r = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$



无穷多 Γ 无穷小的点涡 \rightarrow **面涡** 沿s单位长度上面涡强度 $\gamma = \gamma(s)$ ds上面涡强度 $\gamma(s)ds$

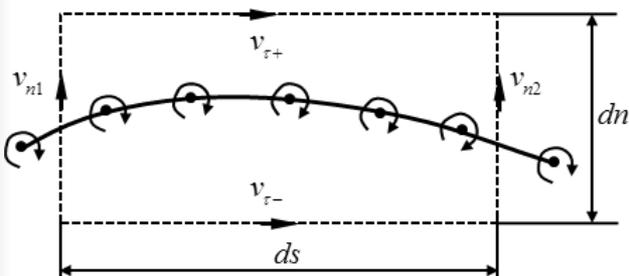
ds对P点的诱导速度 $dV = -\frac{\gamma(s)ds}{2\pi r}$

$$d\phi = -\frac{\gamma(s)ds}{2\pi} \theta$$

- 除面涡外所有点满足无旋条件
- 除面涡外所有点处诱导速度满足矢量叠加原理且具有连续性

速度势

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \gamma(s) \theta ds$$



包围面涡的封闭曲线上 $d\Gamma = -\gamma(s)ds$

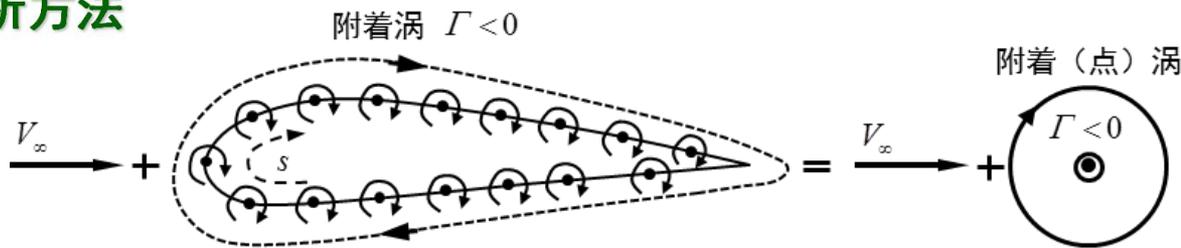
$$d\Gamma = -v_{\tau+} ds + v_{n2} dn + v_{\tau-} ds - v_{n1} dn = (v_{\tau-} - v_{\tau+}) ds + (v_{n2} - v_{n1}) dn$$

$$dn \rightarrow 0 \Rightarrow d\Gamma = (v_{\tau-} - v_{\tau+}) ds$$

$$\gamma(s) = v_{\tau+} - v_{\tau-}$$

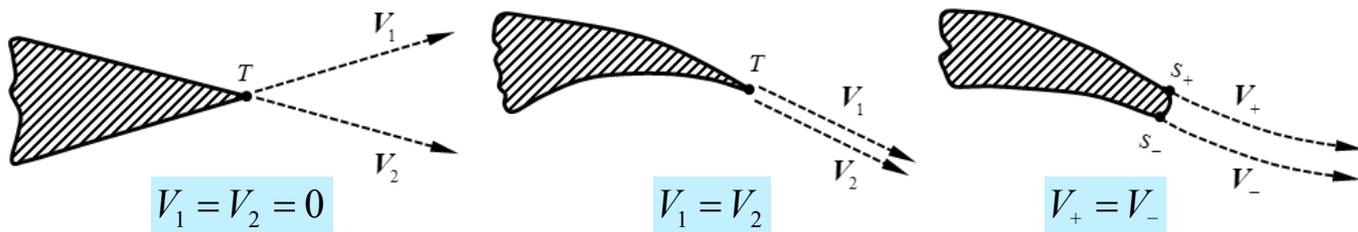
面涡两侧涡切线方向速度分量不连续而法线速度分量相同
穿过面涡的当地切线速度改变量等于当地面涡强度

分析方法



附着涡：表征绕翼型有环量流动的旋涡

均匀来流 V_∞
变强度面涡诱导速度 \rightarrow 叠加 \rightarrow 面涡/翼型表面为流线 $\Gamma = -\int \gamma(s) ds \Rightarrow L = -\rho V_\infty \Gamma$



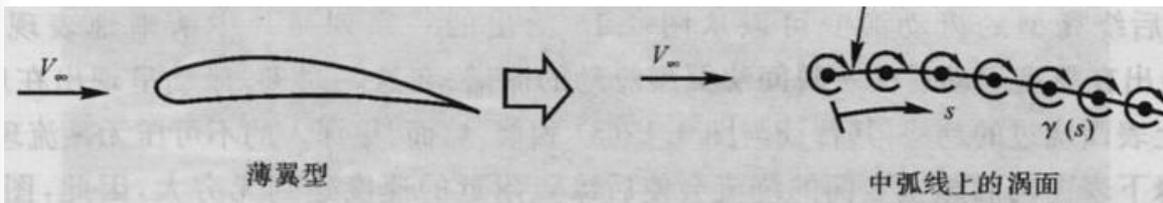
库塔条件 $\gamma(s) = v_{\tau+} - v_{\tau-} \Rightarrow \gamma_T = V_1 - V_2 = 0$ 或 $\gamma_T = V_+ - V_- = 0$

流体流经翼型 \rightarrow 黏性附面层 \rightarrow 强梯度 \rightarrow 强旋度 \rightarrow 沿翼型表面的薄旋涡层 \sim 与翼型表面重合

$\gamma = \gamma(s)$ 解析解 \leftarrow 沿翼型中弧线分布面涡 \sim 翼型 \leftarrow 薄翼型 \sim 上下表面重合 \sim 中弧线

薄翼理论

$b_{\max} \ll c, f_{\max} \ll c, |\alpha| \ll 1$ 攻角较小



- 实际翼型剖面的近似
- 反映翼型剖面空气动力学变化规律的一般性结论

薄翼理论的基本方程及其求解

@远场边界

绕翼型的低速无黏势流 $\nabla^2 \phi = 0$; $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)} = \left. \frac{v_y}{v_x} \right|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)}$; $\phi \rightarrow \phi_{\infty}$ 或 $v_{x\infty} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{\infty}$, $v_{y\infty} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{\infty}$

@流场内

@翼型表面

小扰动: 薄翼型假设下, 翼型对于均匀流场的影响小 $\rightarrow \vec{U} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$, $v_x \ll V_{\infty}$, $v_y \ll V_{\infty}$

合速度 $\vec{V} = (v_{x\infty} + v_x) \vec{i} + (v_{y\infty} + v_y) \vec{j} = (V_{\infty} \cos \alpha + v_x) \vec{i} + (V_{\infty} \sin \alpha + v_y) \vec{j}$ 均匀来流速度 V_{∞}

\vec{U} : 由于翼型存在而产生的扰动速度 攻角 α

扰动速度势函数 $\nabla \phi = \vec{U}$ 或 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y$

绕翼型流动的速度势 $\nabla \phi = (v_{x\infty} \vec{i} + v_{y\infty} \vec{j}) + (v_x \vec{i} + v_y \vec{j}) = \nabla(\phi_{\infty} + \phi)$ 或 $\phi = \phi_{\infty} + \phi$

扰动速度势满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \phi = 0$ \leftarrow 具有线性叠加特性

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)} = \left. \frac{V_{\infty} \sin \alpha + v_y}{V_{\infty} \cos \alpha + v_x} \right|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)} = \frac{\sin \alpha + \frac{v_y}{V_{\infty}}}{\cos \alpha + \frac{v_x}{V_{\infty}}} \Bigg|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)}$$

攻角 α 较小 $\approx \frac{\alpha + \frac{v_y}{V_{\infty}}}{1 + \frac{v_x}{V_{\infty}}} \Bigg|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)}$

$$\frac{dy_f}{dx} \pm \frac{dy_b}{dx} \approx \alpha + \frac{1}{V_{\infty}} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

或 $\frac{\partial \phi}{\partial y} \approx V_{\infty} \frac{dy_f}{dx} \pm V_{\infty} \frac{dy_b}{dx} - V_{\infty} \alpha$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)} \approx \alpha + \frac{v_y}{V_{\infty}} \Bigg|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)} = \alpha + \frac{1}{V_{\infty}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Bigg|_{y_{\pm}=y_{\pm}(x)}$$

$\Downarrow v_x/V_{\infty} \ll 1$

$$y_f(x) = \frac{1}{2} [y_+(x) + y_-(x)], \quad y_b(x) = \frac{1}{2} [y_+(x) - y_-(x)] \Rightarrow y_+ = y_f + y_b, y_- = y_f - y_b$$

翼型表面上的小扰动速度势 = 弯度、厚度及攻角三部分贡献的线性之和

$$\varphi = \varphi_f + \varphi_b + \varphi_\alpha = \varphi_f + \varphi_b \quad \text{弯度与攻角一并考虑}$$

$$\nabla^2 \varphi_f = 0, \quad \frac{dy_f}{dx} - \alpha \approx \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \varphi_f}{\partial y}$$

$$\nabla^2 \varphi_b = 0, \quad \pm \frac{dy_b}{dx} \approx \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \varphi_b}{\partial y}$$

@无穷远处

$$v_x = 0, v_y = 0 \Rightarrow \varphi_f|_\infty = 0, \varphi_b|_\infty = 0$$

压强系数 $C_p = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} = 1 - \frac{(V_\infty \cos \alpha + v_x)^2 + (V_\infty \sin \alpha + v_y)^2}{V_\infty^2} \approx -\frac{2v_x}{V_\infty}$ **小扰动及 α 较小**

翼型表面压强系数 $C_p|_{y_\pm=y_\pm(x)} \approx -\frac{2}{V_\infty} v_x|_{y_\pm=y_\pm(x)} = -\frac{2}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{y_\pm=y_\pm(x)} = -\frac{2}{V_\infty} \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_b}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \right) \Big|_{y_\pm=y_\pm(x)}$

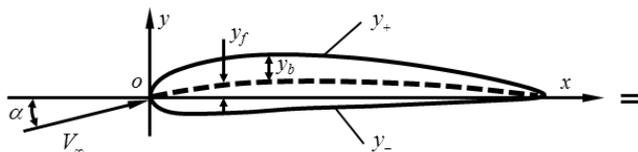
由弯度、厚度、攻角等影响所导致的小扰动速度分量 $v_{xf} = \frac{\partial \varphi_f}{\partial x}, v_{xb} = \frac{\partial \varphi_b}{\partial x}, v_{x\alpha} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x}$

翼型表面压强系数可以叠加 $C_p|_{y_\pm=y_\pm(x)} = (C_{pf} + C_{pb} + C_{p\alpha})|_{y_\pm=y_\pm(x)}$

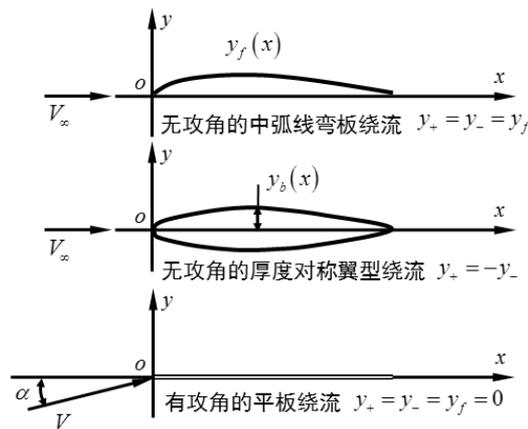
升力/力矩 = 弯度、厚度、攻角作用之和 → **攻角-弯板问题**

薄翼理论

用有攻角的中弧线弯板升力、力矩特性代表小攻角下薄翼型升力、力矩特性的理论



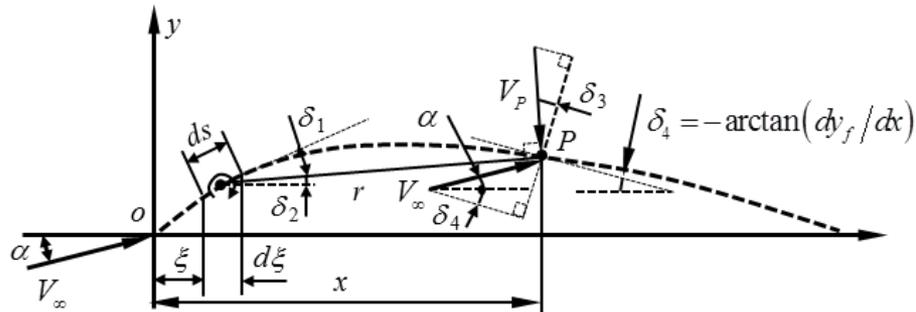
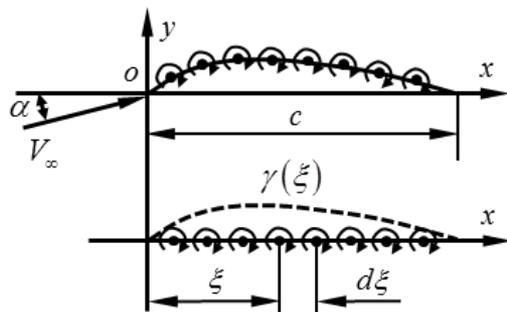
绕翼型的势流流动分解为三个简单势流之和



中弧线上面涡

↓ 翼型平、 α 小

弦线上的面涡



x向距前缘 ξ 处强度 $\gamma(\xi)d\xi$ 的涡对x轴上距前缘x处点诱导的y方向(扰动)速度

$$dv_y = -\frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} = \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(\xi-x)} \Rightarrow v_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)}{\xi-x} d\xi$$

合速度

边界条件 $\frac{1}{2\pi V_\infty} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)}{\xi-x} d\xi \approx \frac{dy_f}{dx} - \alpha$ ← 薄翼理论基本方程 $\gamma(c)=0$ 满足库塔条件

上下翼面x坐标相同的点

$$v_x(x, +0) = -v_x(x, -0) \Rightarrow \gamma(x) = v_x(x, +0) - v_x(x, -0) = 2v_x(x, +0) = -2v_x(x, -0)$$

$$C_p \approx -\frac{2v_x}{V_\infty} = -\frac{\gamma(x)}{V_\infty} \leftarrow v_x(x, +0) = -v_x(x, -0) = \frac{\gamma(x)}{2}$$

• x向距前缘 ξ 处强度 $\gamma(\xi)ds$ 的涡对面涡上距前缘x处点P诱导速度在面涡法线方向投影

$$\left. \begin{aligned} dV_{Pn} &= -\frac{\gamma(\xi)ds}{2\pi r} \cos \delta_3 \\ r &= (x-\xi)/\cos \delta_2, ds = d\xi/\cos \delta_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{Pn} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{x-\xi} \frac{\cos \delta_2 \cos \delta_3}{\cos \delta_1} \Rightarrow V_{Pn} \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{\xi-x}$$

$\cos \delta_1 \approx \cos \delta_2 \approx \cos \delta_3 \approx 1$

• 直匀流在点P的面涡法线方向速度 $V_{\infty n} = V_\infty \sin[\alpha - \arctan(dy_f/dx)] \Rightarrow V_{\infty n} \approx V_\infty [\alpha - (dy_f/dx)]$

薄翼理论基本方程

$$V_{\infty n} + V_{Pn} = 0 \Rightarrow V_\infty \left(\alpha - \frac{dy_f}{dx} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{x-\xi}$$

满足库塔条件的方程解为保证翼型中弧线为流线的面涡强度分布 $\gamma(\xi)$

用级数法对积分方程求解 $V_\infty \left(\alpha - \frac{dy_f}{dx} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x-\xi}$ $\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = V_\infty \left(\alpha - \frac{dy_f}{dx} \right)$

$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0), \xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta), d\xi = \frac{c}{2} \sin \theta d\theta$ $\gamma(0) \rightarrow \infty, \gamma(\pi) \rightarrow 0$

$\gamma(\theta)$ 可表示为傅里叶级数 $\gamma(\theta) = 2V_\infty \left[A_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right] = 2V_\infty \left[A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right]$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(n\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \right] d\theta = \alpha - \frac{dy_f}{dx} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} J_n A_n = \alpha - \frac{dy_f}{dx}$$

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = 1 \quad J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = -\cos(n\theta_0), \quad n \geq 1$$

$$\frac{dy_f}{dx} = \alpha - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta_0) A_n \quad \frac{dy_f}{dx} = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta_0) B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} d\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta_0) \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} \cos(n\theta_0) d\theta_0 \right]$$

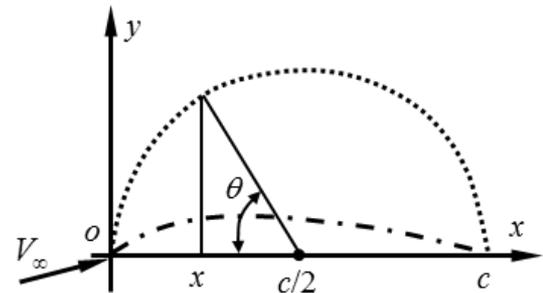
$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} d\theta_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta_0) \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} \cos(n\theta_0) d\theta_0 = \alpha - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta_0) A_n$$

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} d\theta_0$$

由攻角及中弧线形状决定

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} \cos(n\theta_0) d\theta_0, \quad n \geq 1$$

仅与中弧线形状有关



绕薄翼流动的气动特性

$$\int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta = \pi, \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\Gamma = \int d\Gamma = -\int_0^c \gamma(\xi) d\xi = -\int_0^\pi \gamma(\theta) \frac{c}{2} \sin \theta d\theta = -cV_\infty \int_0^\pi \left[A_0(1 + \cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \sin \theta \right] d\theta = -\pi cV_\infty \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right)$$

$$L = \pi c \rho V_\infty^2 \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \Rightarrow c_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c} = \pi(2A_0 + A_1) \Rightarrow c_\alpha = \frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi \frac{dA_0}{d\alpha} + \pi \frac{dA_1}{d\alpha} = 2\pi \frac{dA_0}{d\alpha} = 1, \frac{dA_1}{d\alpha} = 0$$

升力系数与攻角的关系是线性的 $c_l = c_\alpha (\alpha - \alpha_0) = 2\pi(\alpha - \alpha_0) \Rightarrow \alpha_0 = \alpha - \frac{c_l}{c_\alpha}$

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{2A_0 + A_1}{2} = \alpha - \frac{1}{2} \left[2 \left(\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} d\theta_0 \right) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} \cos \theta_0 d\theta_0 \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} (1 - \cos \theta_0) d\theta_0$$

翼型存在弯度，零升攻角 \neq 零

翼型微元段 $d\xi$ 产生的升力 $dL = dN \cos \alpha \approx dN = -\rho V_\infty d\Gamma = \rho V_\infty \gamma(\xi) d\xi$ 力臂 $\xi \cos \alpha \approx \xi$

$$M_{LE} = -\int_0^c dL \xi \cos \alpha \approx -\int_0^c dL \xi = -\rho V_\infty \int_0^c \gamma(\xi) \xi d\xi = -\frac{\pi}{4} \rho V_\infty^2 c^2 \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)$$

$$c_{mLE} = \frac{M_{LE}}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c^2} = -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) = -\left[\frac{c_l}{4} + \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \right]$$

$$c_{mac} = c_{mLE} + \frac{x_{ac}}{c} c_l \Rightarrow c_{mac} = -\left[\frac{c_l}{4} + \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \right] + \frac{x_{ac}}{c} c_l = \left(\frac{x_{ac}}{c} - \frac{1}{4} \right) c_l - \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2)$$

$$\frac{dc_{mac}}{d\alpha} = \frac{dc_{mac}}{dc_l} \frac{dc_l}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x_{ac}}{c} - \frac{1}{4} \right) \frac{dc_l}{d\alpha} = \left(\frac{x_{ac}}{c} - \frac{1}{4} \right) 2\pi = 0 \Rightarrow x_{ac} = \frac{c}{4} \quad \text{焦点位置}$$

零升力矩系数 $c_{mac} = c_{m,1/4} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1)$

压力中心 $x_{cp} = -\frac{c_{mLE}}{c_l} c = \frac{\frac{c_l}{4} + \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2)}{c_l} c = \frac{c}{4} \left[1 + \frac{\pi}{c_l} (A_1 - A_2) \right] \Rightarrow x_{cp} = \frac{c}{4} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{A_1 - A_2}{\alpha - \alpha_0} \right]$

$c_l = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$

有弯度的大部分翼型 $A_1 - A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} (\cos \theta_0 - \cos 2\theta_0) d\theta_0 > 0$

$x_{cp} = \frac{c}{4} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{A_1 - A_2}{\alpha - \alpha_0} \right] > \frac{c}{4}$ 压力中心一般位于1/4弦长以后，随 α 增大前移

$c_{mac} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1) < 0$ 零升力矩一般为负，使翼型低头

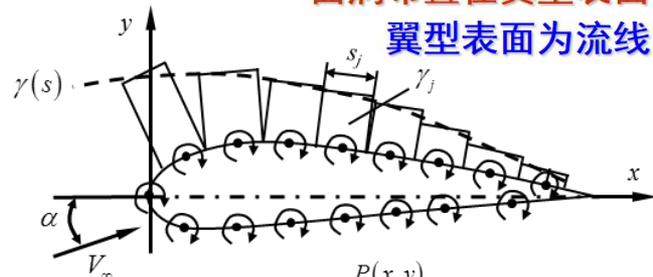
任意形状翼型绕流的面涡法

翼型厚度 > 12%
大、中攻角/飞行器起降过程

将翼型表面等分成 n 个直线面涡元，面元 j ($j=1,2,\dots,n$) 对点 P 产生的速度势

$$\Delta\phi_j = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_j} \theta_{pj} \gamma_j ds_j = -\frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \theta_{pj} ds_j \quad \theta_{pj} = \arctan \frac{y-y_j}{x-x_j}$$

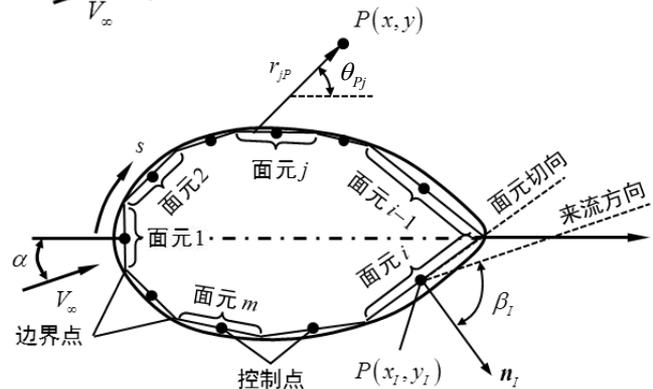
面涡布置在翼型表面
翼型表面为流线



所有面元对点 P 产生的速度势 $\phi(P) = -\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \theta_{pj} ds_j$

P 位于第 i 个面元的控制点处，所有面元对其诱导的速度势

$$\phi(x_i, y_i) = -\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \theta_{ij} ds_j \quad \theta_{ij} = \arctan \frac{y_i - y'_j}{x_i - x'_j}$$

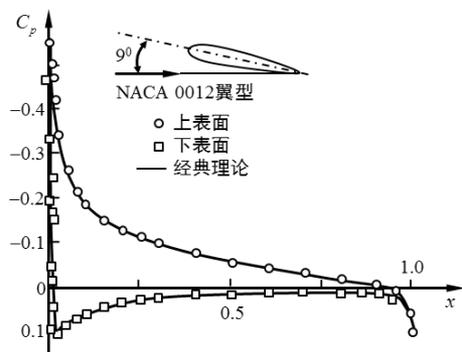


流动的法向速度为零 $-\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j + V_\infty \cos \beta_i = 0$

面涡法控制方程

$$J_{ij} = \int_{s_j} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j \Rightarrow -\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} J_{ij} + V_\infty \cos \beta_i = 0 \quad + \quad \gamma(c) = 0 / \gamma_i + \gamma_{i-1} = 0$$

$$\Gamma = -\sum_{j=1}^n \gamma_j s_j \quad L = \rho V_\infty \sum_{j=1}^n \gamma_j s_j \quad M_{LE} = -\rho V_\infty \sum_{j=1}^n \gamma_j s_j x_j$$



低速机翼的气动特性

机翼的几何参数与气动参数

展长 l : 机翼两侧翼尖之间的距离 = $2 \times$ 机翼长度 + 机身直径

弦长 $c(z)$: 机翼展向剖面前缘与后缘间距离

平均气动弦长 $c_A = \frac{2}{S} \int_0^{l/2} [c(z)]^2 dz$

当量弦长 $c_{cp} = \frac{S}{l}$

机翼面积 S { 参考面积 $S = 2 \int_0^{l/2} c(z) dz$
表面积/浸润面积

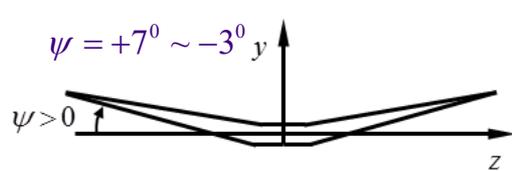
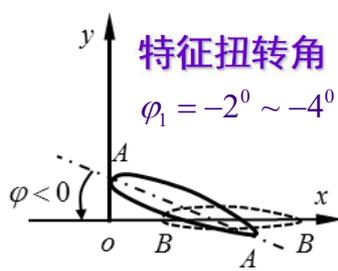
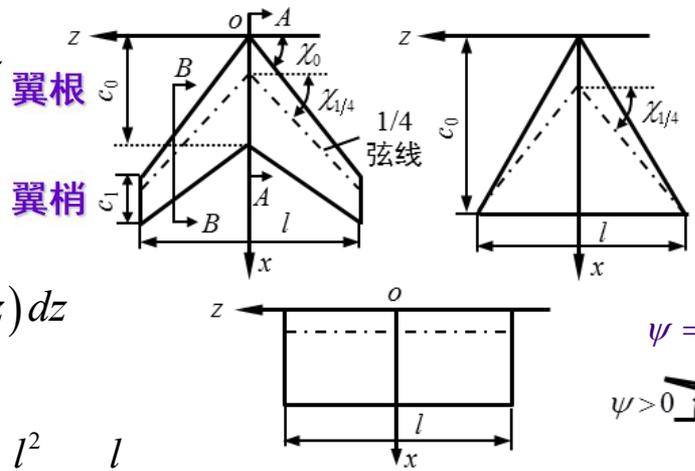
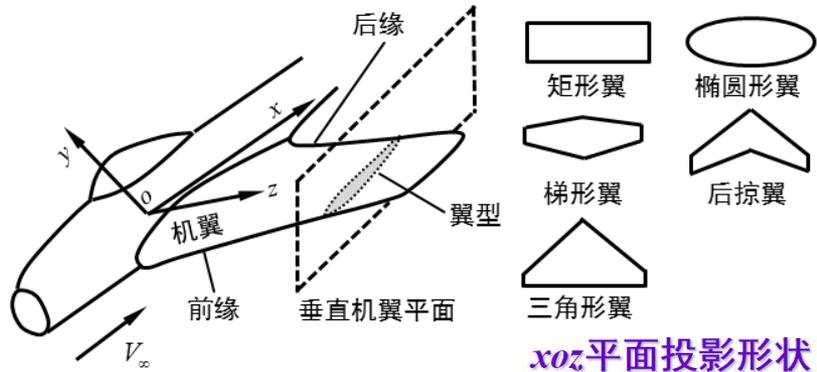
展弦比 λ : 展长与弦长的比值 $\lambda = \frac{l^2}{S} = \frac{l}{c_{cp}}$

根梢比 η : 翼根弦长与翼尖弦长的比值 $\eta = \frac{c_0}{c_1}$

后掠角 χ : 机翼前缘或某条连接翼根、翼尖的直线与 z 轴的夹角

几何扭转角 $\varphi(z)$: 不同展向位置的翼型弦线与根弦的夹角 **上洗 下洗**

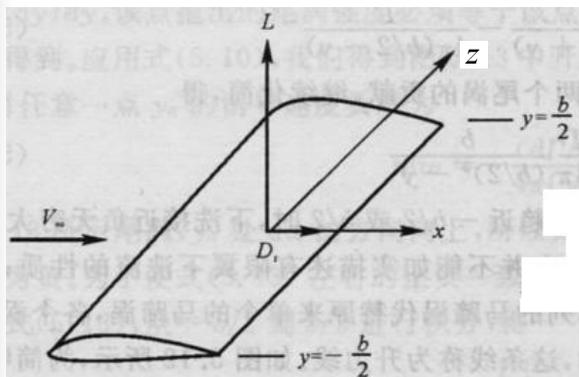
上(下)反角 ψ : 左、右两个机翼弦平面与 xoz 平面的夹角



$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S}$$

$$C_{m_z} = \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S c_A}$$

有限翼展机翼的旋涡分析



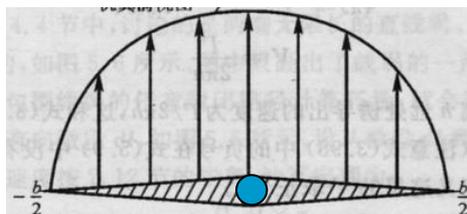
翼端效应

翼梢处流体高压→低压



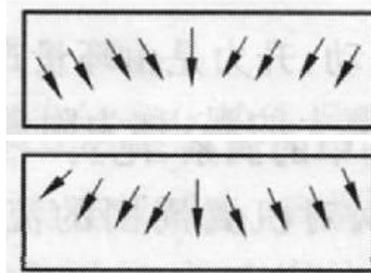
翼梢处流体接触 → p相等
L或 $\Gamma=0$

翼梢→翼根 L↑ $L'(z) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(z)$



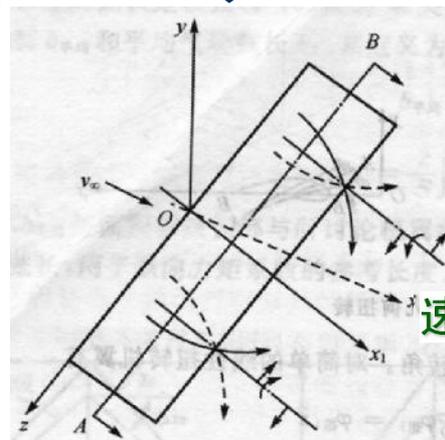
直匀流+附着涡+自由尾涡
直匀流+ Π 型马蹄涡

上表面流体向中部汇聚



3D效应
展向流动

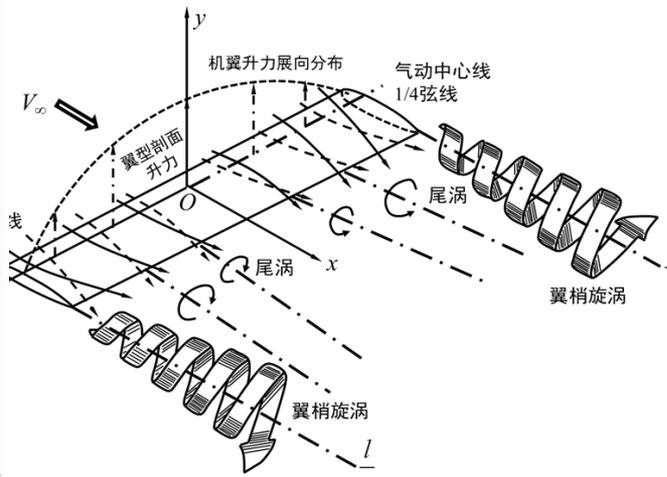
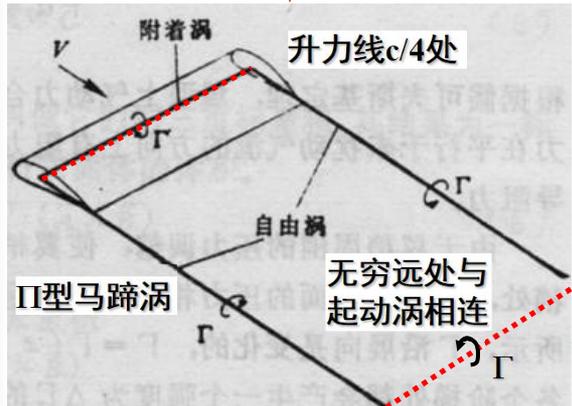
下表面流体向翼梢汇聚



尾缘

速度方向差

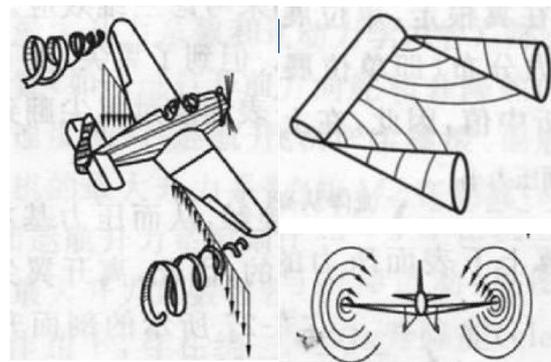
尾涡



翼梢处最强

连续分布尾涡
流向发展/缠绕

大涡



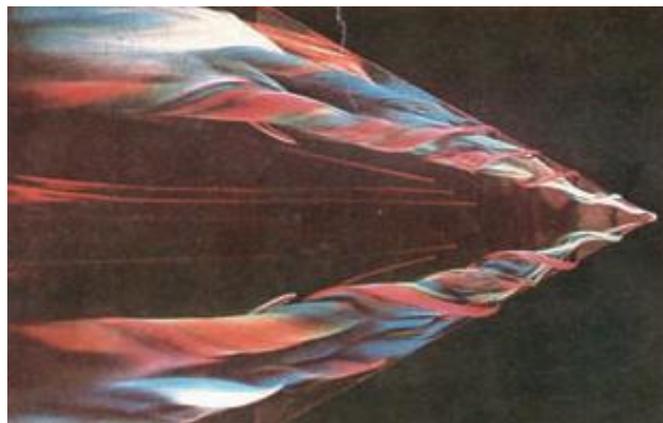
飞机的升力、阻力都与涡旋密切相关



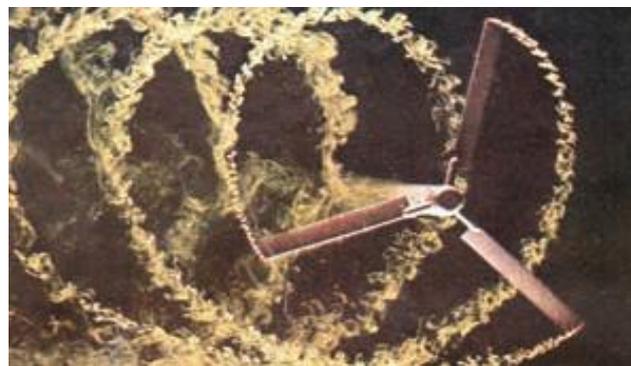
飞机着陆时翼尖处的涡旋



协和式飞机着陆时流场中涡旋的正视图



有攻角三角薄翼上表面的卷状涡

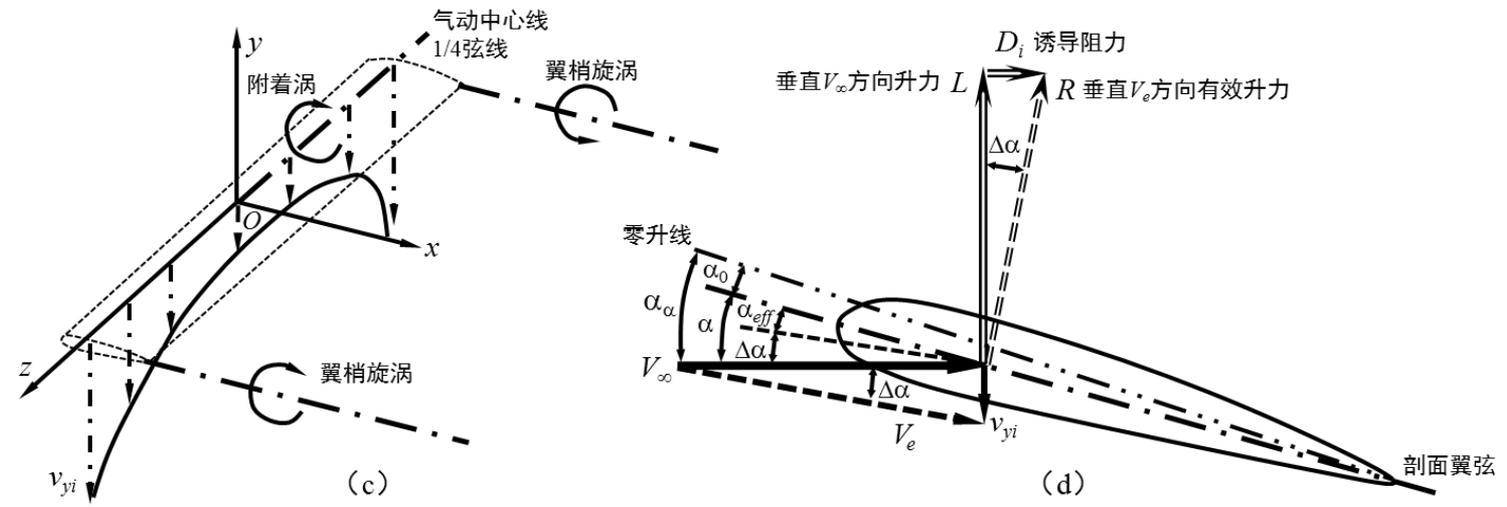


直升飞机前进时螺旋桨梢部产生的涡旋

下洗及诱导阻力

诱导阻力 D_i $c_{di} = D_i / q_\infty S$ 升致阻力

亚声速机翼总阻力 $D = \left. \begin{matrix} \text{表面摩擦阻力 } D_f \\ \text{分离} \rightarrow \text{压差阻力 } D_p \end{matrix} \right\} \text{黏性} \rightarrow \text{型阻 } c_d = \frac{D_f + D_p}{q_\infty S}$



尾涡 \rightarrow 诱导下洗速度 v_{yi} \rightarrow 来流 $V_\infty + v_{yi} =$ 等效来流 V_e
 几何攻角 $\alpha -$ 下洗角 $\Delta\alpha =$ 等效攻角 α_{eff} \rightarrow 垂直等效来流方向升力 R
 $\Delta\alpha_i \approx -v_{yi} / V_\infty$ \downarrow 绝对升力 $L +$ 诱导阻力 D_i

- 每段时间内必须不断生成自由尾涡的一段以维持涡的存在 \rightarrow 发动机耗功 \rightarrow 涡动能
- 翼梢尾涡改变了有限翼展机翼表面压力 \rightarrow 机翼在来流方向的压力无法平衡 \rightarrow 阻力

升力线理论

● **基本思想** 小攻角 大展弦比 } Γ 沿翼展分布 } 求翼型剖面升力 \rightarrow 积分 \rightarrow 3D翼型升力
 \rightarrow 每个翼型剖面上流动 \sim 2D

● 理论模型

A 机翼 $\sim c/4$ 处展向强度连续变化的附着涡线 \Rightarrow **升力线**

$$\Gamma_{z=\pm l/2} = 0 \rightarrow \Gamma_{z=0} = \Gamma_{\max}$$

B 旋涡不能中断且 $\Gamma = \text{const}$
 升力线的涡强度展向变化 \rightarrow 无限多 Π 型马蹄涡叠加

每个马蹄涡 \rightarrow 升力线方向 Γ 变化量 = 自由尾涡 Γ

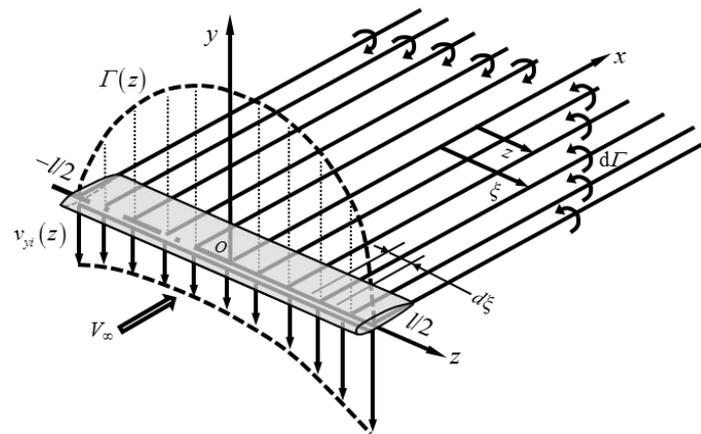
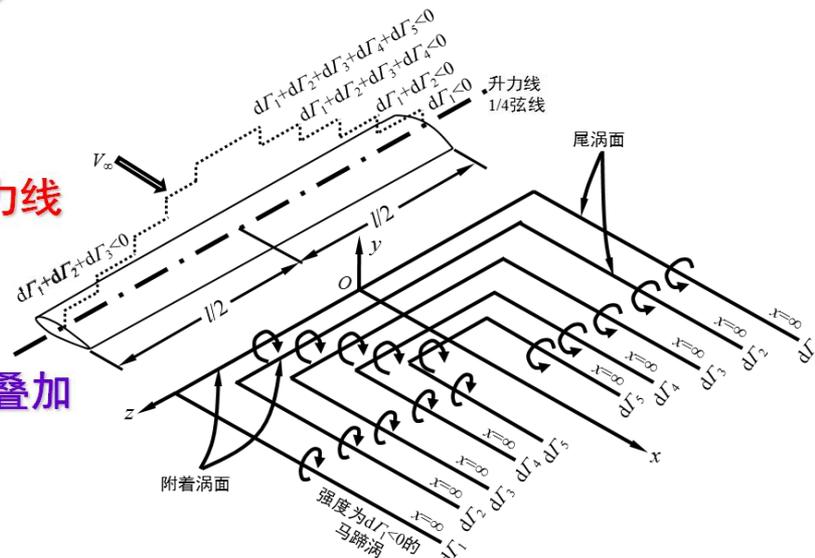
升力线微元段 $d\xi$ 坐标为 ξ $d\Gamma = \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi = \text{尾涡}\Gamma$

该尾涡对任一点 z 诱导的下洗速度 (向下为正)

$$dv_{yi}(z) = -\frac{\frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi}{4\pi(z-\xi)} = \frac{\frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi}{4\pi(\xi-z)}$$

$$v_{yi}(z) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{4\pi(\xi-z)} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} d\xi$$

整个尾涡面对任一点 z 诱导的下洗速度



• 普朗特升力线理论基本方程

下洗角/诱导迎角 $\Delta\alpha(z) \approx \tan\Delta\alpha = \frac{v_{yi}(z)}{V_\infty}$

$$\left. \begin{aligned} v_{yi}(z) &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4\pi(\xi-z)} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} d\xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\alpha(z) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{\xi-z} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} d\xi$$

升力系数 $c_l(z) = c_\alpha [\alpha_{\text{eff}}(z) - \alpha_0(z)]$ **机翼无扭转** $\alpha_0 = \text{const}$

翼型升力 $L(z) = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c_l(z) c(z) = -\rho V_\infty \Gamma(z) \Rightarrow c_l(z) = -\frac{2\Gamma(z)}{V_\infty c(z)}$

$$\alpha_{\text{eff}}(z) = -\frac{2\Gamma(z)}{V_\infty c(z) c_\alpha} + \alpha_0(z)$$

$$\alpha_{\text{eff}}(z) = \alpha(z) - \Delta\alpha(z)$$

机翼无扭转 $\alpha = \text{const}$

$$\boxed{-\frac{2\Gamma(z)}{V_\infty c(z) c_\alpha} + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{\xi-z} = \alpha(z) - \alpha_0(z)} \Rightarrow \Gamma(z)$$

升力及升力系数

$$L = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cos[\Delta\alpha(z)] dR \approx \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dR = -\rho V_\infty \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) dz$$

$$C_L = -\frac{2}{V_\infty S} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) dz$$

$$\frac{dR}{dz} = -\rho V_\infty \Gamma(z)$$

$$R = -\rho V_\infty \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) dz$$

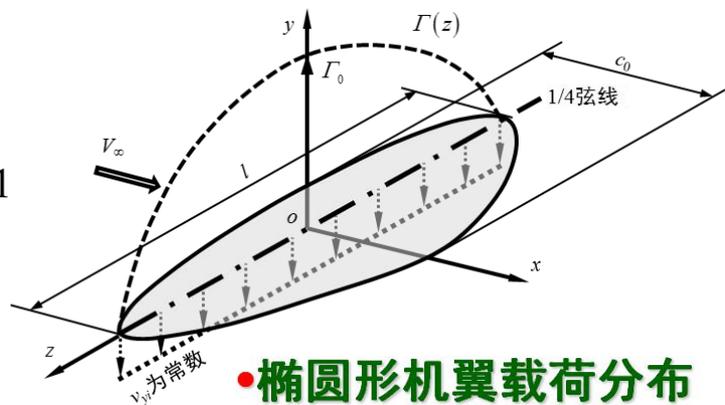
诱导阻力及系数

$$D_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin[\Delta\alpha(z)] dR \approx \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Delta\alpha(z) dR = -\rho V_\infty \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) \Delta\alpha(z) dz$$

$$C_{Di} = -\frac{2}{V_\infty S} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z) \Delta\alpha(z) dz$$

基于升力线理论的有限翼展机翼气动力特性

设环量分布 $\Gamma(z) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{z}{l/2}\right)^2} \Rightarrow \left[\frac{\Gamma(z)}{\Gamma_0}\right]^2 + \left(\frac{z}{l/2}\right)^2 = 1$



① $\Gamma_{z=0} = \Gamma_0$ ② $\Gamma(z)$ 展向椭圆分布 \Rightarrow L 椭圆分布 ③ $\Gamma_{z=\pm l/2} = 0$

• 椭圆形机翼载荷分布

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\xi} &= -\frac{4\Gamma_0}{l^2} \frac{\xi}{\sqrt{1-4\xi^2/l^2}} \\ v_{yi}(z) &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{4\pi(\xi-z)} \frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} d\xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{yi}(z) = -\frac{\Gamma_0}{\pi l^2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\xi}{(\xi-z)\sqrt{1-4\xi^2/l^2}} d\xi$$

$$z = -\frac{l}{2} \cos \theta, \quad \xi = -\frac{l}{2} \cos \theta_1, \quad d\xi = \frac{l}{2} \sin \theta_1 d\theta_1$$

$$v_{yi}(\theta) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi l} \int_0^\pi \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_1 - \cos \theta} d\theta_1$$

$$\therefore \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta_1)}{\cos \theta_1 - \cos \theta} d\theta_1 = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \Rightarrow v_{yi} = -\frac{\Gamma_0}{2l} > 0 = const, \quad \Delta\alpha = \frac{v_{yi}}{V_\infty} = -\frac{\Gamma_0}{2lV_\infty} > 0 = const$$

$$z = -\frac{l}{2} \cos \theta, \quad dz = \frac{l}{2} \sin \theta d\theta$$

$$L = -\rho V_\infty \Gamma_0 \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1-4z^2/l^2} dz = -\rho V_\infty \Gamma_0 \frac{l}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = -\rho V_\infty \Gamma_0 \frac{l}{4} \pi \Rightarrow \Gamma_0 = -\frac{4L}{\rho V_\infty l \pi} = -\frac{2V_\infty S C_L}{l \pi}$$

$$\Delta\alpha = \frac{S C_L}{l^2 \pi} = \frac{C_L}{\lambda \pi}$$

$$C_{Di} = -\frac{2\Delta\alpha}{V_\infty S} \int_{-l/2}^{l/2} \Gamma(z) dz = -\frac{\Delta\alpha \pi l \Gamma_0}{2V_\infty S} = \frac{C_L^2}{\lambda \pi} \Rightarrow \begin{aligned} C_{Di} &\propto C_L^2 \\ C_{Di} &\propto 1/\lambda \end{aligned}$$

$$C_L = -\frac{\Gamma_0 l \pi}{2V_\infty S} \quad \lambda = \frac{l^2}{S}$$

- 诱导阻力与升力有关 \Rightarrow 升致阻力，起飞/着陆时占总阻力大部分，高速巡航时占25%；
- 展弦比 $\lambda \uparrow \Rightarrow$ 诱导阻力 \downarrow ，满足结构强度条件下应尽量增大 λ 。

升力系数 $C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} c_l(z) c(z) dz \Leftarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c_l(z) c(z)$ 单位翼展长度
翼型的升力

$$\alpha_{\text{eff}}(z) = \alpha(z) - \Delta\alpha(z)$$

$$c_l(z) = c_\alpha [\alpha_{\text{eff}}(z) - \alpha_0(z)] \Rightarrow c_l(z) = c_\alpha [\alpha(z) - \Delta\alpha(z) - \alpha_0(z)] = c_\alpha \left[\alpha(z) - \frac{C_L}{\lambda\pi} - \alpha_0(z) \right]$$

$$\Delta\alpha = \frac{SC_L}{l^2\pi} = \frac{C_L}{\lambda\pi}$$

无扭转的椭圆机翼，沿展向 $\alpha(z) = \text{const}$, $\alpha_0(z) = \text{const}$

$$C_L = \left[c_\alpha \left(\alpha - \frac{C_L}{\lambda\pi} - \alpha_0 \right) \right] \frac{1}{S} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} c(z) dz = c_\alpha \left(\alpha - \frac{C_L}{\lambda\pi} - \alpha_0 \right) \Rightarrow C_L = \frac{c_\alpha}{1 + \frac{c_\alpha}{\lambda\pi}} (\alpha - \alpha_0)$$

$\lambda \uparrow \Rightarrow C_L \uparrow, C_{Di} \downarrow$

有限翼展机翼升力线斜率 $c_\alpha \left(1 + \frac{c_\alpha}{\lambda\pi} \right)^{-1} < c_\alpha$ 二维翼型

机翼对称平面 $z=0$

翼型剖面 $c(z)$ 分布 $\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c_l(z) c(z) = -\rho V_\infty \Gamma(z) \Rightarrow c_l(z) c(z) = -\frac{2\Gamma(z)}{V_\infty} \Rightarrow c_l(0) c_0 = -\frac{2\Gamma_0}{V_\infty}$

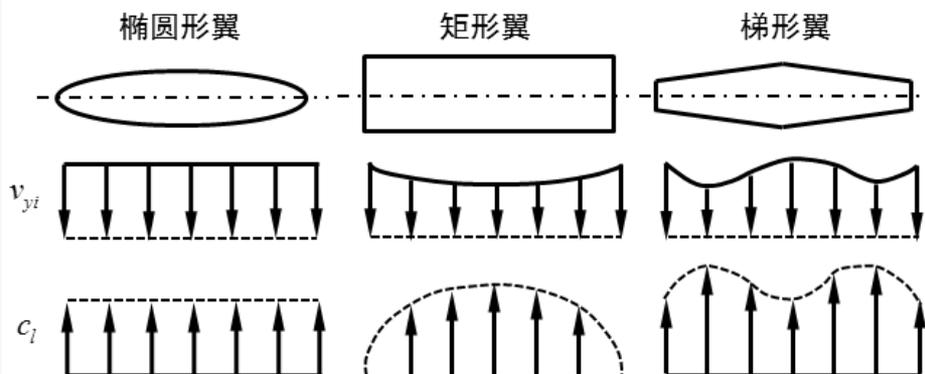
机翼无几何扭转 $c_l(z) = \text{const} = c_l(0) \Rightarrow \frac{c(z)}{c_0} = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{l/2} \right)^2}$ $\Gamma(z) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{z}{l/2} \right)^2}$

- 椭圆形环量分布机翼各剖面弦长沿展向也是椭圆形分布 \Rightarrow 椭圆形机翼
- 结构和工艺复杂，广泛采用矩形翼和梯形翼，采用三角级数法求解 $\Gamma(z)$

一般机翼 $C_L = \frac{c_\alpha}{1 + \frac{c_\alpha}{\pi\lambda}(1+\tau)}(\alpha - \alpha_0)$; $C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi\lambda}(1+\delta) = \frac{C_L^2}{\pi\lambda e}$

τ 与机翼平面形状有关，小正数
机翼有效系数： $e \leq 1$

椭圆形机翼 $C_L = \frac{c_\alpha}{1 + \frac{c_\alpha}{\lambda\pi}}(\alpha - \alpha_0)$; $C_{Di} = \frac{C_L^2}{\lambda\pi}$



• 椭圆形机翼 C_L 最大、 C_{Di} 最小，升阻特性最佳

• 椭圆翼型加工昂贵 \Rightarrow 梯形翼型

• 任意平面形状大展弦比直机翼的气动特性，通过修正 τ 、 δ 得到

• 升力线理论是一种大展弦比直机翼的近似势流理论，优点：

① 明确给出机翼的一些气动力参数

② 黏性影响不大的中小攻角下， $\lambda \geq 5$ 、 $\chi_{1/4} \leq 20^\circ$ ，与实验值符合较好

• 升力线理论以下情况不适用：

① 攻角大出现分离、Re数低、非薄机翼

② 后掠角大、展弦比小 $\Rightarrow \lambda < 4$ 矩形翼，升力线斜率误差 $> 10\%$

升力面理论与涡格法 适用于后掠角较大或展弦比较小的机翼

直匀流 + Π 型马蹄涡 一条直的、变涡强的升力线代替机翼 \times
 不同弦线位置、与机翼局部后掠角一致的无数条升力线代替机翼 \checkmark

升力线群的涡强 $\gamma = \gamma(x, z)$ 尾涡强度 $\delta = \delta(x, z)$ @尾缘向后 $\gamma = 0, \delta = \delta(z)$

涡线交织的面 \Rightarrow 升力面 升力线代表的涡线群与机翼局部后掠角度一致
 尾涡代表的涡线群与x轴平行

升力面方程

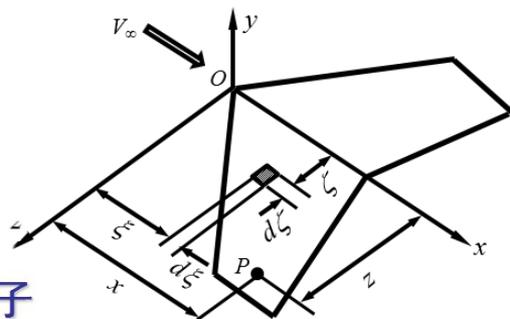
$$v_{yi}(x, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\gamma(x-\xi) + \delta(z-\zeta)}{[(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\xi d\zeta, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{4\pi V_\infty} \iint_S \frac{\gamma(x-\xi) + \delta(z-\zeta)}{[(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\xi d\zeta$$

对 $P(x, 0, z)$ 点的诱导速度

$$\vec{V} \cdot \nabla F = 0$$

涡格法/求解升力面方程计算模型和步骤:

- ① 机翼平面分割成若干个四边形的微小格子
- ② 格子翼上布置强度为常值的马蹄涡
- ③ 不同格子翼的马蹄涡强度不同
- ④ 利用比奥-萨伐尔公式计算总的诱导速度
- ⑤ 确定马蹄涡涡强的线性代数方程组
- ⑥ 计算合力、合力矩



升力面/中弧面方程

$$F(x, y, z) = y - f(x, z) = 0$$

