模型固体火箭发动机拉法尔喷管初步设计与发动机综合性能提升方法的研究

Quix 中青为火箭小组

摘要：本文简单的探讨了固体火箭发动机拉法尔喷管的工作状态与一般设计方法，并通过了一些实例研究了其对性能提升的情况，结果表明对于一般的低压发动机使用拉法尔喷管对推力的提升较小，对于高压发动机而言则很有必要。同时药柱可燃端面数量也对发动机总体性能起到了关键的作用。

关键词：拉法尔喷管，两相流内弹道模型，模型火箭发动机

拉法尔喷管概述

拉法尔喷管是一种使气流从亚音速加速到超音速的收缩-扩张喷管，主要用途为产生超音速气流，如下图所示。对于燃烧室出口气流压强较大的航空发动机而言，经过收敛喷管流动后，喷管已经达到超临界状态，喷管出口压强仍然远大于外界压强，则可以考虑通过扩张喷管减少气体的不完全膨胀而导致的推力损失，实现对发动机性能的提升。

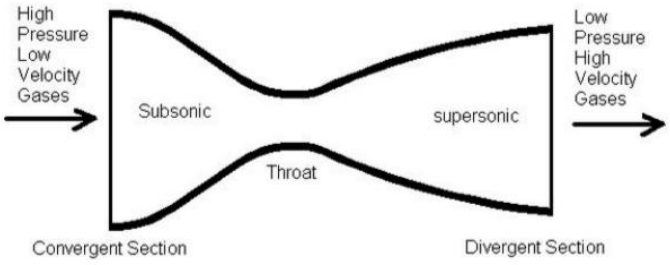

图 1

使用拉法尔喷管会在其扩张流道中产生超音速气流，进而有可能出现激波。超音速气流通过激波是非等熵流动，因此只有在喷管内不出现激波的情况下，或是说在激波前后的流动，我们才能够使用绝热等熵流（不计入摩擦）的公式。

拉法尔喷管理论设计方法

关于拉法尔喷管工作状态的知识可以参见参考文献[1]，本文就不再赘述了。下文假定当前喷管工况为拉法尔喷管内无正激波，出口处可能存在斜激波，则拉法尔喷管内部流动可以采用等熵流的公式。对于外部存在过膨胀或欠膨胀导致的激波可以予以忽略，仅考察出口截面前的气流状态即可。对于收敛段的末端，喷管达到临界或超临界状态，喉部马赫数 $Ma_t = 1$，由参考文献 1 可得

$$\frac{p_0}{p_t} \approx \frac{p_c}{p_t} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_t^{\,2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \times 1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \beta_{cr}^{\ -1} \qquad \text{式 1}$$

其中滞止压强 p_0 可被近似为燃烧室压强 p_c，p_t 为拉法尔喷管喉部压强，β_{cr} 为临界压强比，

γ 为尾喷管内气体比热比。对于两相效应较大的尾气而言需通过参考文献[3]中的方法计算尾气的两相流比热比 γ_{2ph}，典型尾气两相流效应大的推进剂包括硝糖系推进剂，RNX 推进剂等。

由此可知喉部压强计算公式为

$$p_t = p_c \beta_{cr} \qquad \text{式 2}$$

当 $p_t > p_e$ 时，收敛喷管处于超临界状态，使用这一条件即可简单判断发动机燃烧室压强是否达到能够应用拉法尔喷管的条件。由参考文献[2]可知多数模型火箭发动机可以满足这一条件。

对于扩张喷管来说，应用等熵面积比公式

$$\frac{A_e}{A_t} = \frac{1}{Ma_e}\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_e^{\,2}\right)\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \qquad \text{式 3}$$

其中 A_e 为拉法尔喷管出口截面积，A_t 为拉法尔喷管的喉部截面积，Ma_e 为出口马赫数。

已知拉法尔喷管面积比 $\frac{A_e}{A_t}$ 就可以算出出口马赫数 Ma_e 了，进而可以通过下式计算出口压强

$$p_e = \frac{p_0}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_e^{\,2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \approx \frac{p_c}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_e^{\,2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \qquad \text{式 4}$$

由上式变换并推广到全部截面可得

$$Ma_x = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_c}{p_x}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]} \qquad \text{式 5}$$

其中 p_x 为某截面上的压强，Ma_x 为该截面处的马赫数。带入式 3，可得

$$\frac{A_t}{A_x} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\frac{p_x}{p_c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\left[1-\left(\frac{p_x}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \qquad \text{式 6}$$

其中 A_x 为某截面积大小，p_x 为该截面上的压强。

对于任意时刻的燃烧室压强 p_c 而言，为了使喷管达到完全膨胀，最大化推力，则出口压强 p_e 应等于外界压强，这里取大气压 $p_a = 101325\text{Pa}$ 即可得：

$$\frac{A_t}{A_e}=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\frac{p_a}{p_c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\left[1-\left(\frac{p_a}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \qquad \text{式 7}$$

对于普通拉法尔喷管而言，面积比 $\frac{A_e}{A_t}$ 不可能随时进行变化，故选择使用带入燃烧室平均压强 $\overline{p_c}$ 来求解最优面积比 $\frac{A_e}{A_t}_{\text{opt}}$ 。其中 $\overline{p_c}=\frac{\sum^{n} p_c'}{n}$，$p_c'$ 应选取燃烧室压强大于火箭建压后和药柱燃烧完毕前的最小压强的压强段，一般最小压强可取 0.3Mpa-2Mpa，其值可依照不同设计条件而自行修改。由此就可以计算得 $\frac{A_e}{A_t}_{\text{opt}}$ ，其中

$$\frac{A_e}{A_t}_{opt}=\left\{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\frac{p_a}{p_c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\left[1-\left(\frac{p_a}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}\right\}^{-1} \qquad \text{式 8}$$

在求解最优面积比后可通过简单的几何学推算拉法尔喷管的详细几何建模。对于喷管收敛段来说，即使收敛角度取得非常大也不会发生气流分离的问题，一般可采用 60° 的收敛角度。而扩张段可采用抛物线型设计，或是直锥形设计。为防止气流与壁发生分离，其沿轴线方向发展的喷管壁最大角度应小于 20° ，但该段长度又应尽量短以减少附面层的流动损失。工程应用中通常对于锥形拉法尔喷管则可采用最大角度小于 15° 的设计以缩短喷管长度。本文仅涉及拉法尔喷管的初步设计，在计算出最优面积比后的具体技术细节，便不再描述了。

上文中的全部公式仅适用于喷管内无正激波的一维绝热无黏等熵流，而无法计算正激波出现下的工况。正激波出现在管内是由于喷管内部压强过低所导致的（喷管工作状态可参考参考文献[1]），一般出现在占总工作时间时间非常短的初始建压和药柱燃烧殆尽后的等熵膨胀末段，实际对整体冲量与推力表现影响不大，故可对这一影响因素进行忽略处理。对于拉法尔喷管最优化设计而言，应当以最大化火箭推力与总冲为目标进行设计。

火箭发动机推力可由下述的公式进行计算

$$F=\eta C_f A_t p_c \qquad \text{式 9}$$

其中 η 为喷管效率，一般取 0.75-0.9，对于一般的拉法尔喷管而言可以取 0.85；C_f 为推力系数，可由下式计算

$$C_f=\Gamma\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma\text{-}1}\left[1\text{-}\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}+\frac{A_e}{A_t}\left(\frac{p_e}{p_c}-\frac{p_a}{p_c}\right) \qquad \text{式 10}$$

其中 p_a 为大气压，或其他条件下的外界压强，Γ 为只与比热比 γ 有关的单值函数

$$\Gamma=\sqrt{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$ 式 11

总结一下拉法尔喷管的一般设计流程

1. 通过已知的发动机几何参数、燃料性能计算发动机的总体内弹道性能
2. 选择计算平均压强的压强段起点与终点，并计算该段内发动机的平均压强 $\overline{p_c}$
3. 将计算得的平均压强带入式 8 计算，得出 $\frac{A_e}{A_t}_{\text{opt}}$
4. 基于面积比选取相应的曲线进行简单建模，初步设计出拉法尔喷管
5. 计算该设计下发动机的总冲，推力表现，并尝试进一步优化发动机性能
6. 确定最终方案后，进行详细的几何建模，同时可以通过 CFD 等方法进一步优化流动损失

拉法尔喷管与发动机性能研究

下面以设计三款发动机为例考察拉法尔喷管对推力与总冲提升的表现。

1.经典低压 PVC 发动机

发动机选择推进剂为 KNDX，喷管内径 4mm，药柱总长 60mm，直径 16mm，内径 4mm，端面数为 1，属于典型的 2cm 直径 PVC 水管为外壳的发动机。计算得该发动机的内弹道性能如下图所示

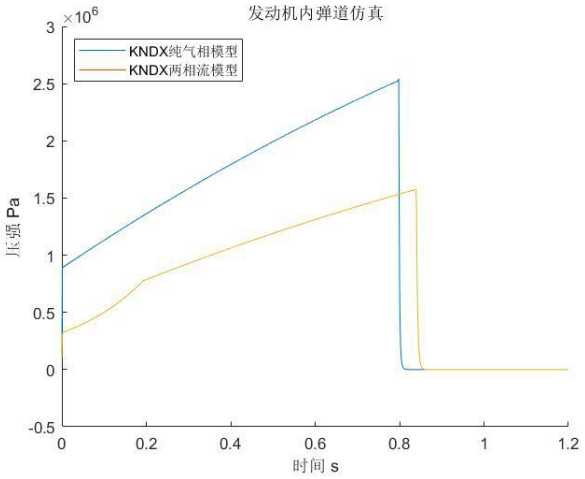

图 2

由于 KNDX 存在较大的两相流效应，故使用两相流内弹道模型。取燃烧室压强 p_c 不低于 0.3Mpa 的工作压强段计算平均压强 $\overline{p_c}$，可得 $\overline{p_c}\approx 1.0348\ \text{MPa}$，代入式 8 计算面积比可得 $\frac{A_e}{A_t}_{\text{opt}}=2.3814$。事实上多数模型火箭都采用的是直喷管而非收敛喷管，存在一定的流动损失，但这里都近似简化为收敛喷管处理。设尾喷管效率 η_n 为 0.85，两相流比热比 $\gamma_{2ph}=1.043$，

计算推力可得下图

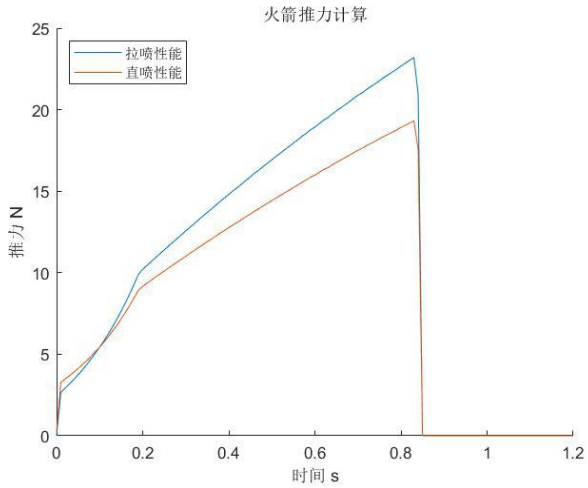

图 3

已知火箭发动机的总冲量的定义为 $I_t = \int_0^{t_0} Fdt$，其中 t_0 为工作时间，F 为推力，故可知采用收敛喷管的发动机总冲量 $I_{t,c}$=10.55$N \cdot s$；采用拉法尔喷管的发动机总冲量 $I_{t,l}$=12.22$N \cdot s$，总冲的提升百分比由下式计算：

$$\%I_t = \frac{I_{t,l} - I_{t,c}}{I_{t,c}} \approx 15.83\% \qquad \text{式 12}$$

可以看出使用拉法尔喷管对低压 PVC 发动机性能的提升较为有限。

2.无端面可燃高压金属发动机

发动机选择推进剂为 KNSB，喷管内径 4mm，药柱总长 150mm，直径 20mm，内径 4mm，端面数为 0。由于计算过程与第一个例子没有大的改动，这里直接展示内弹道结果。

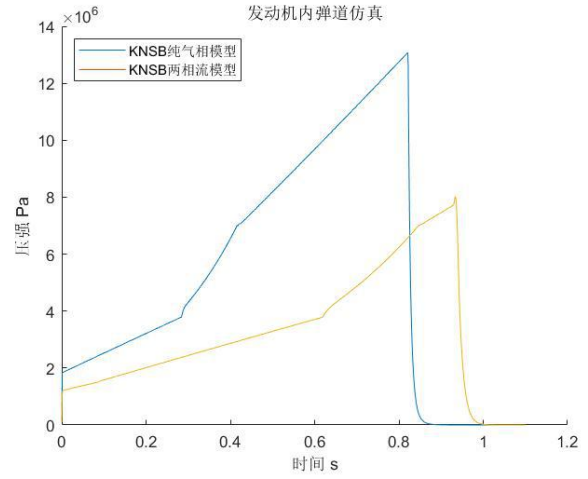

图 4

由于 KNSB 同样存在较大的两相流效应，故使用两相流内弹道模型。由两相流内弹道结果可计算得 $\overline{p_c} \approx 3.4997\text{MPa}$，最大燃烧室压强为 $p_{c,\max_1} = 7.91\text{MPa}$。计算最优面积比可得

$\frac{A_e}{A_{t\ \mathrm{opt}}} = 7.1629$。设尾喷管效率$\eta_n$为 0.85，两相流比热比$\gamma_{2ph} = 1.043$，计算推力可得下图

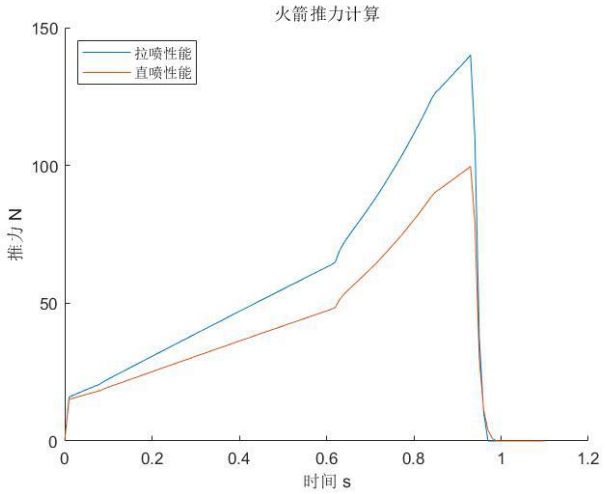

图 5

采用收敛喷管的发动机总冲量$I_{t,c_1} = 44.51N \cdot s$；采用拉法尔喷管的发动机总冲量$I_{t,l_1} = 59.31N \cdot s$，继而可得$\%I_{t_1} = \frac{I_{t,l} - I_{t,c}}{I_{t,c}} \approx 33.3\%$。对比燃烧室工作压强较低的 PVC 发动机，拉法尔喷管在燃烧室平均压强较高的发动机中对总冲量的提升有了显著提高。

3. 多端面可燃的高压金属发动机

上文中的例二采用了零端面燃烧的工况，现考虑发动机其他设计条件全部不变，将原单药柱装药改为使用 5 段药柱装药，开放端面，则有 10 个端面参与燃烧，可得下图的内弹道仿真

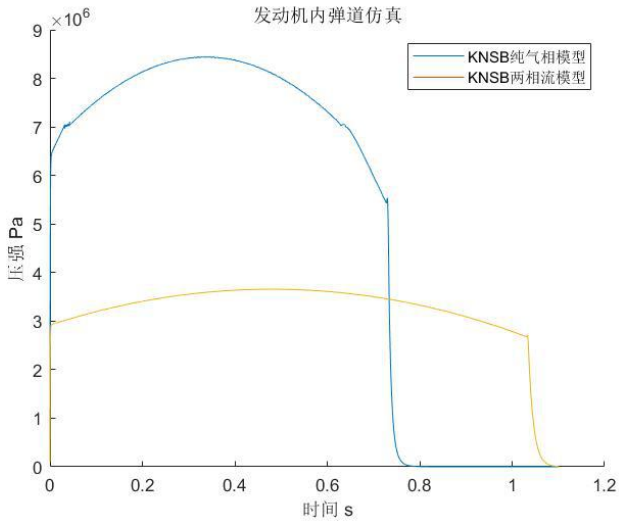

图 6

可以看出随着端面数量的增加，发动机的工作压强曲线变得更加平滑了。此时仍然采用两相

流模型，调整选取计算平均压强的压强段最低压强为 1Mpa，可得 $\overline{p_c} \approx 3.3274\text{MPa}$，计算最优面积比可得 $\frac{A_e}{A_t}_{\text{opt}} = 6.8701$。设尾喷管效率 η_n 为 0.85，两相流比热比 $\gamma_{2ph} = 1.043$，计算推力后如下图所示

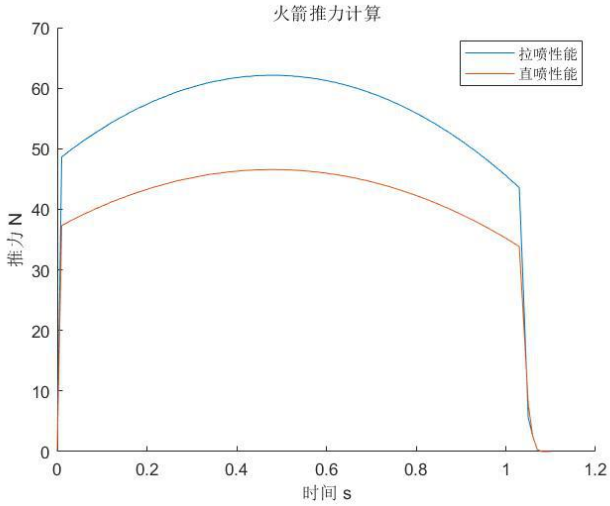

图 7

采用收敛喷管的发动机总冲量 $I_{t,c_2} = 44.40N \cdot s$，较例 2 中的 $I_{t,c_1} = 44.51N \cdot s$ 稍有下降；采用拉法尔喷管的发动机总冲量 $I_{t,l_2} = 58.67N \cdot s$，较例 2 中的 $I_{t,c_2} = 59.31N \cdot s$ 同样稍有下降，进而可得 $\%I_{t_2} = \frac{I_{t,l_2} - I_{t,c_2}}{I_{t,c_2}} \approx 32.1\%$。对比例 2，发动机总体性能有微弱的下降，但其燃烧室最大压强被大大降低，其中 $p_{c,\max_2} = 3.65\text{MPa}$，对比例 2 中的 $p_{c,\max_1} = 7.91\text{MPa}$ 下降了近一倍多。故采用多端面燃烧可以在不进行对比冲进行过大降低的前提下大大减轻发动机外壳质量，实现总体比冲的增加。

关于发动机设计可燃端面数量的进一步讨论

当然，可燃端面数并不是越多越好，参考下图的对例 2 描述的金属发动机两相模型的内弹道仿真，它展示了不同端面数对平滑压强曲线，减小最大压强效果的差别

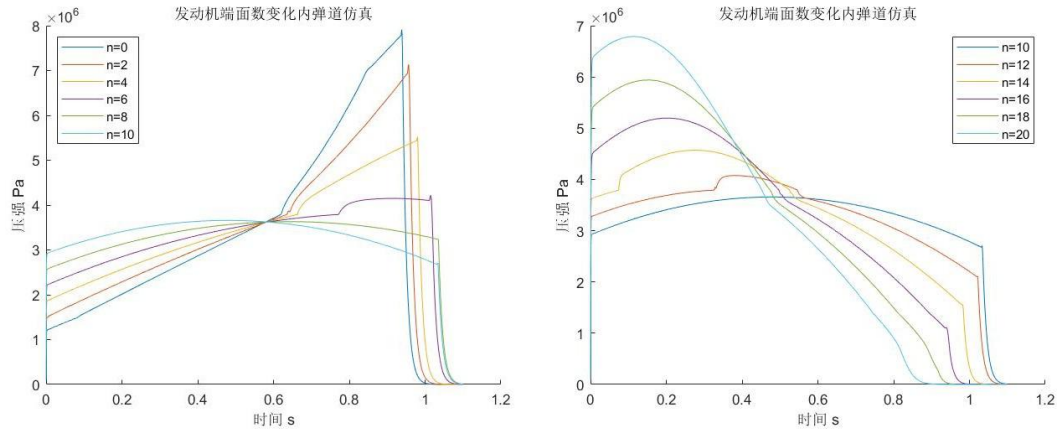

图 8

当端面数从零开始增加时，最大压强最初出现在了工作时间的后段部分，随着端面数的不断增加而逐渐向时间轴的前部移动，最大压强逐渐下降。在超过某一极限时，最大压强重新升高，平滑效果消失，发动机总体工作时间也随之缩短。这是由于端面数的增加，导致了初始喷燃比的增加，使得最大喷燃比逐渐向时间段的前部推进，进而产生了上述的效果。在上述的 KNSB 金属发动机的例子中最优解出现在了端面数 n 介于 8 至 10 之间，实际工程应用中该金属发动机可以取端面数为 9 或者 10 即可。

下面来研究下不同的面积比下会导致的最大比冲的变化，上述的 KNSB 金属发动机不同端面数下的面积比与总冲量拟合图如下，图例中 n 为端面数，最优面积比的计算采用了上文所述的方法。

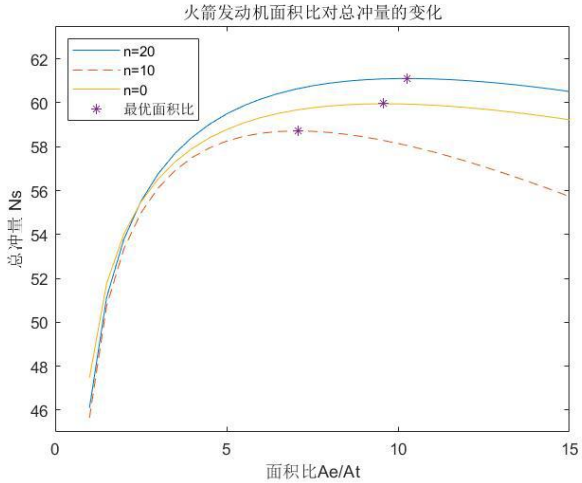

图 9

由上文对端面数与内弹道的结果来看，当压力曲线越是平滑时，面积比的轻微误差会偏离最大比冲点较快；当压力曲线越是陡峭时，其面积比在上升达到某一特定数值时之后再进一步变化，其总冲下降趋势明显较小。故在最优端面数解的情况下，压强曲线最为平滑，火箭发动机对拉法尔喷管是否良好设计会比其他端面数情况下更为敏感。但实际上仔细观察上图 9 可以发现，喷管设计偏离最优面积比影响总冲较端面数改变对总冲的影响而言还是略小的，实际应用中需权衡考量这两大因素以达到最优化设计。

结论

通过上述的分析可得出以下的基本结论：

1.拉法尔喷管可在管内无正激波的情况下应用一维绝热无黏等熵定常流的公式进行计算。由于存在管内正激波的工况在发动机实际工作中时间较少，故多数情况下可以予以适当的忽略。

2.对于发动机燃烧室压强较高的发动机而言，拉法尔喷管对推力与总冲的提升更为明显。

3.对于高压发动机而言应采用多端面燃烧来降低发动机最大工作压强，减轻燃烧室外壳重量以达到提升比冲的效果。同时该端面数存在一最优值，可通过内弹道仿真进一步确定。

4.同一装药设计，不同可燃端面数的发动机内弹道计算得的压强曲线越是平滑，其对拉法尔喷管是否良好设计越是敏感。

参考文献

[1]徐敏. 空气与气体动力学基础[M]. 西北工业大学出版社, 2015.

[2]樊舒扬.关于固体模型火箭发动机收敛喷管尾流是否达到音速的问题讨论[Z].
https://www.kechuang.org/t/84389, 2019

[3] Nakka,R. Solid Rocket Motor Theory -- Two-phase Flow[Z].
http://www.nakka-rocketry.net/techs1.html,2001