

长除法计算公式法

作者：唐展辉

摘要：本文研究了长除法运算的问题，通过对长除法计算过程进行详细演算和深入分析，得出了计算长除法结果的一般性规律，利用多项式除法中分子分母多项式的各项系数直接计算出结果。

关键词：长除法；公式法；快速算法；公式化算法。

Formulaic Method of Long-Division

Author: Tang Zhanhui

Abstract: This paper deep and detailedly studies the problem of long division. After a series of calculation and analysis, I obtains the general rule of calculating the result of long division that we can directly calculates the result by using the coefficients of the polynomial in the numerator and denominator.

Keywords: Long-Division; Formulaic Method; Fast Calculation Method, Formulaic Calculation.

1 引言

长除法是一种很常用的计算方法，适用于整式除法、小数除法、多项式除法（即因式分解）等较重视计算过程和商数的除法，过程中兼用了乘法和减法。在很多工程问题（如离散系统的Z逆变换）都需要使用到长除法，但是传统长除法计算方法在运算过程中需要十分谨慎的运算过程，因为每一步运算都基于前一步运算的结果，所以很容易导致“一步错步步错”的结果。因此为了解决长除法在运算过程中的这种问题，总结出了公式化的运算规律，大大减少了长除法计算的运算量和错误率，而且更加容易在程序上实现。

2 传统长除法的计算：

以计算： $\frac{x^3-12x^2-42}{x-3}$ 为例：

首先把被除式、除式按某个字母作降幂排列，缺项补零，写成以下形式：

$$\frac{x^3-12x^2+0x-42}{x-3} \quad (2.1)$$

然后商和余数可以这样计算：

1. 用分子的第一项除以分母的最高次项（即次数最高的项，此处为 x ），得到首商，写在横线之上（ $\frac{x^3}{x} = x^2$ ）。

2. 将分母乘以首商，乘积写在分子前两项之下 ($x^2(x-3) = x^3-3x^2$)，同类项对齐。

3. 从分子的相应项中减去刚得到的乘积（消去相等项，把不相等的项结合起来），得到第一余式，写在下面。然后，将分子的下一项“拿下来”。

4. 把第一余式当作新的被除式，重复前三步，得到次商与第二余式（直到余式为零或余式的次数低于除式的次数时为止。被除式=除式×商式+余式）。

5. 重复第四步，得到三商与第三余式。余式小于除式次数，运算结束。横线之上的多项式即为商，而剩下的 (-123) 就是余数。

注意：在不同的使用情况，有些结果需要对余数继续计算，得到有 x^{-n} 的项。其中，算数的长除法可以看做以上算法的一个特殊情形，即所有 x 被替换为 10 的情形。计算过程如（图一）所示：

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 9x - 27 \\
 x-3 \overline{) x^3 - 12x^2 + 0x - 42} \\
 \underline{x^3 - 3x^2} \\
 -9x^2 + 0x \\
 \underline{-9x^2 + 27x} \\
 -27x - 42 \\
 \underline{-27x + 81} \\
 -123
 \end{array}$$

图表 1

显然，以上的计算方法太过于繁杂，接下来我们来推导长除法快速计算方法。

3 长除法快速计算方法：

为了得到一般化的规律，我们先对公式的系数进行一般化处理，并把分母的最高次项的系数变成 1，得到：
$$\frac{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}{x+b_0} \quad (3.1)$$

接下来进行计算：

		a_0x^2	$(a_1 - a_0b_0)x^1$	$(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0))x^0$	$(a_3 - b_0(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0)))x^{-1}$
x^1	$+b_0x^0$	a_0x^3	$+a_1x^2$	$+a_2x^1$	$+a_3x^0$
		$+0x^{-1}$			
		a_0x^3	$+a_0b_0x^2$		
		0	$(a_1 - a_0b_0)x^2$	$+a_2x^1$	$+a_3x^0$
			$(a_1 - a_0b_0)x^2$	$-b_0(a_1 - a_0b_0)x^1$	0
			0	$+(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0))x^1$	$+a_3x^0$
				$(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0))x^1$	$-b_0(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0))x^0$
				0	$(a_3 - b_0(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0)))x^0$
					$(a_3 - b_0(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0)))x^{-1}$
					0
					$-(a_3 - b_0(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0)))x^{-1}$

图表 2

计算结果是：

$$a_0x^2 + (a_1 - a_0b_0)x^1 + (a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0))x^0 + (a_3 - b_0(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0)))x^{-1} - (a_3 - b_0(a_2 - b_0(a_1 - a_0b_0)))x^{-2} + \dots \quad (3.2)$$

观察上式可以看出：

1) 商的最高次（降幂排列第一项）的系数： $a = \det[a_0]$;

2) 商的第二项的系数： $b = -\det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 1 & b_0 \end{bmatrix}$;

3) 商的第三项的系数： $c = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_0 & 0 \\ 0 & 1 & b_0 \end{bmatrix}$;

4) 商的第四项的系数： $d = -\det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_0 \end{bmatrix}$;

5) 商的第五项的系数： $e = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_2 & 0 \\ 1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_0 \end{bmatrix}$;

6)

把式（2.1）的具体参数：

a0	a1	a2	b0
1	-12	-42	-3

图表 3

带入矩阵中;

计算得到: $a=1$, $b=-9$, $c=-27$, $d=-123$, $e=-369$;显然与上述使用传统计算方法结果一致。

接下来用 matlab 进行验证, 代码如下:

```
A=[1];
B=[1 -12;1 -3];
C=[1 -12 0;1 -3 0;0 1 -3];
D=[1 -12 0 -42;1 -3 0 0;0 1 -3 0;0 0 1 -3];
E=[1 -12 0 -42 0;1 -3 0 0 0;0 1 -3 0 0;0 0 1 -3 0;0 0 0 1 -3];
a=det(A);
b=-det(B);
c=det(C);
d=-det(D);
e=det(E);
fprintf("计算结果: %fx^2", a);
if b >= 0
    fprintf("+");
end
fprintf("%fx^1", b);
if c >= 0
    fprintf("+");
end
fprintf("%fx^0", c);
if d >= 0
    fprintf("+");
end
fprintf("%fx^(-1)", d);
if e >= 0
    fprintf("+");
end
fprintf("%fx^(-2)", e);
fprintf("\n");
```

运算结果如下(图表 2):

```

Command Window
>> Long_Division
计算结果: 1.000000x^2-9.000000x^1-27.000000x^0-123.000000x^(-1)-369.000000x^(-2)
fx >>

```

图表 4

此可得出一般规律(结论):

定理 设某个分式的分子参数为 $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$, 分母的参数为 $[1, b_0, b_1, b_2, b_3]$ 。

$$\text{分式为: } \frac{a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5}{x^4 + b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3} \quad (3.3)$$

由分式的各项系数组成的矩阵如下【式 (3.4)】所示:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \dots \\ 1 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_0 & b_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

计算结果的最高项次数为: $\frac{\text{分子的最高项次数}}{\text{分母的最高项次数}}$, 按降幂排列的各项系数分别为: 此矩阵【式 (3.4)】的 n 阶顺序主子式的行列式 $\times (-1)^{n-1}$ (其中 $n=1, 2, 3, \dots$)。